Procesamiento Digital de Imágenes

Apuntes, Dr. Boris Escalante

6 de Octubre de 2006

5. Restauración óptima de imágenes, filtros de Wiener

Notación:

$\bar{g}^T$ es la traspuesta de $\bar{g}$

$\bar{f}^T$ es la traspuesta de $\bar{f}$

$\bar{n}^T$ es la traspuesta de $\bar{n}$

$R_{nm}(x,y)$ es la función de correlación de las funciones n y m en x y y

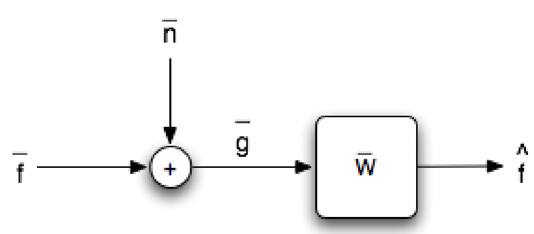
$S_{nm}(u,v)$ es la densidad espectral de potencia de las funciones N y M en u y v

Las funciones de densidad espectral de potencia se obtienen de la siguiente forma general:

$$S_{nm}(u,v) = \mathcal{F}\{< R_{nm}(x,y) >\} = N(u,v) \cdot M^*(u,v) \tag{1}$$

5.1. Caso 1: Ruido aditivo

Figura 1: Ruido aditivo



La definición del filtro de Wiener es: $\bar{W} = \bar{R}_{fg}\bar{R}_{gg}^{-1}$. El modelo de degradación de la imagen es el siguiente $\bar{g} = \bar{f} + \bar{n}$, donde $\bar{g}^T = \bar{f}^T + \bar{n}^T$. Con estas últimas ecuaciones sustituimos en la definición del filtro de Wiener. Para $\bar{R}_{fg}$ tendremos lo siguiente:

$$\bar{R}_{fg} \quad = \quad E\{\bar{f}\bar{g}^T\} = E\{\bar{f}(\bar{f}^T + \bar{n}^T)\} = E\{\bar{f}\bar{f}^T\} + E\{\bar{f}\bar{n}^T\} = \bar{R}_{ff} + \bar{R}_{fn}$$

y para $\bar{R}_{gg}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{gg} &= E\{\bar{g}\bar{g}^T\} = E\{(\bar{f}+\bar{n})(\bar{f}^T + \bar{n}^T)\} = E\{\bar{f}\bar{f}^T + \bar{f}\bar{n}^T + \bar{n}\bar{f}^T + \bar{n}\bar{n}^T\} \\
&= E\{\bar{f}\bar{f}^T\} + E\{\bar{f}\bar{n}^T\} + E\{\bar{n}\bar{f}^T\} + E\{\bar{n}\bar{n}^T\} \\
&= \bar{R}_{ff} + \bar{R}_{fn} + \bar{R}_{nf} + \bar{R}_{nn}
\end{aligned}$$

considerando que el ruido es estadísticamente independiente de la señal original, podemos simplificar el resultado.

$$\bar{R}_{fn} = \bar{R}_{nf} = 0$$

por lo que

$$\bar{R}_{fg} = \bar{R}_{ff}$$

y

$$\bar{R}_{gg} = \bar{R}_{ff} + \bar{R}_{nn}$$

sustituyendo en la definición del filtro de Wiener tendremos:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \bar{R}_{fg}\bar{R}_{gg}^{-1} \\ &= \bar{R}_{ff}[\bar{R}_{ff} + \bar{R}_{nn}]^{-1} \end{aligned}$$

que en el dominio de la frecuencia tendremos:

$$W(u,v) = \frac{S_{ff}(u,v)}{S_{ff}(u,v) + S_{nn}(u,v)} \tag{2}$$

Esto se puede hacer así dado que la función de densidad espectral de potencia $S_{xx}(u,v)$ es la transformada de Fourier de la función de correlación $R_{xx}(x,y)$. Obtener de esta manera el filtro de Wiener resulta más fácil. La funciones de densidad espectral de potencia para f y n se obtienen usando la Ec. 1.

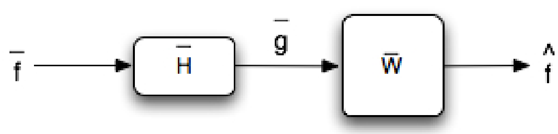
$$S_{ff}(u,v) = F(u,v) \cdot F^{*}(u,v)$$

y

$$S_{nn}(u,v) = N(u,v) \cdot N^{*}(u,v)$$

5.2. Caso 2: Pérdida de nitidez

Figura 2: Pérdida de nitidez



La definición del filtro de Wiener es: $\bar{W} = \bar{R}_{fg}\bar{R}_{gg}^{-1}$. El modelo de degradación de la imagen es el siguiente $\bar{g} = \bar{H}\bar{f}$, donde $\bar{g}^{T} = \bar{f}^{T}\bar{H}^{T}$. Con estas últimas ecuaciones sustituimos en la definición del filtro de Wiener. Para $R_{\bar{fg}}$ tendremos lo siguiente:

$$\bar{R}_{fg} \quad = \quad E\{\bar{f}\bar{g}^{T}\} = E\{\bar{f}(\bar{f}^{T}\bar{H}^{T})\} = E\{\bar{f}\bar{f}^{T}\}\bar{H}^{T} = \bar{R}_{ff}\bar{H}^{T}$$

y para $R_{\bar{gg}}$ se tiene lo siguiente:

$$\bar{R}_{gg} \quad = \quad E\{\bar{g}\bar{g}^{T}\} = E\{(\bar{H}\bar{f})(\bar{f}^{T}\bar{H}^{T})\} = \bar{H}E\{\bar{f}\bar{f}^{T}\}\bar{H}^{T} = \bar{H}R_{ff}\bar{H}^{T}$$

Sustituyendo en la definición del filtro de Wiener tendremos:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \bar{R}_{fg}\bar{R}_{gg}^{-1} \\ &= \bar{R}_{ff}\bar{H}^{T}[\bar{H}R_{ff}\bar{H}^{T}]^{-1} \end{aligned}$$

suponiendo que $\bar{H}$ es invertible, la ecuación anterior puede escribirse como:

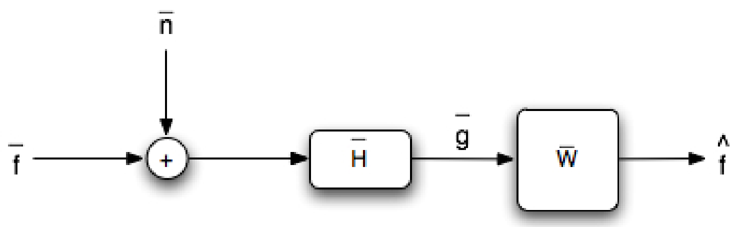
$$\begin{aligned} \bar{W} &= \bar{R}_{ff}\bar{H}^T[(\bar{H}^T)^{-1}R_{ff}^{-1}\bar{H}^{-1}] \\ &= \bar{H}^{-1} \end{aligned}$$

que en el dominio de la frecuencia tendremos:

$$W(u,v) = \frac{1}{H(u,v)} \tag{3}$$

5.3. Caso 3: Ruido aditivo y pérdida de nitidez

Figura 3: Ruido aditivo y pérdida de nitidez



La definición del filtro de Wiener es: $\bar{W} = \bar{R}_{fg}\bar{R}_{gg}^{-1}$. El modelo de degradación de la imagen es el siguiente $\bar{g} = \bar{H}(\bar{f}+\bar{n})$=$\bar{H}\bar{f}+\bar{H}\bar{n}$, donde $\bar{g}^T = \bar{f}^T\bar{H}^T + \bar{n}^T\bar{H}^T$. Con estas últimas ecuaciones sustituimos en la definición del filtro de Wiener. Para $R_{\bar{f}g}$ tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{fg} &= E\{\bar{f}\bar{g}^T\} = E\{\bar{f}(\bar{f}^T\bar{H}^T + \bar{n}^T\bar{H}^T)\} = E\{\bar{f}\bar{f}^T\bar{H}^T\} + E\{\bar{f}\bar{n}^T\bar{H}^T\} \\ &= E\{\bar{f}\bar{f}^T\}\bar{H}^T + E\{\bar{f}\bar{n}^T\}\bar{H}^T \\ &= (\bar{R}_{ff} + \bar{R}_{fn})\bar{H}^T \end{aligned}$$

y para $R_{\bar{g}g}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{gg} &= E\{\bar{g}\bar{g}^T\} = E\{(\bar{H}\bar{f}+\bar{H}\bar{n})(\bar{f}^T\bar{H}^T + \bar{n}^T\bar{H}^T)\} = E\{(\bar{H}\bar{f}+\bar{H}\bar{n})\bar{f}^T\bar{H}^T + (\bar{H}\bar{f}+\bar{H}\bar{n})\bar{n}^T\bar{H}^T\} \\ &= E\{\bar{H}\bar{f}\bar{f}^T\bar{H}^T + \bar{H}\bar{n}\bar{f}^T\bar{H}^T + \bar{H}\bar{f}\bar{n}^T\bar{H}^T + \bar{H}\bar{n}\bar{n}^T\bar{H}^T\} \\ &= \bar{H}E\{\bar{f}\bar{f}^T\}\bar{H}^T + \bar{H}E\{\bar{n}\bar{f}^T\}\bar{H}^T + \bar{H}E\{\bar{f}\bar{n}^T\}\bar{H}^T + \bar{H}E\{\bar{n}\bar{n}^T\}\bar{H}^T \\ &= \bar{H}\bar{R}_{ff}\bar{H}^T + \bar{H}\bar{R}_{nf}\bar{H}^T + \bar{H}\bar{R}_{fn}\bar{H}^T + \bar{H}\bar{R}_{nn}\bar{H}^T \end{aligned}$$

considerando que el ruido es estadísticamente independiente de la señal original, podemos simplificar el resultado.

$$\bar{R}_{fn} = \bar{R}_{nf} = 0$$

por lo que tendremos para $\bar{R}_{fg}$ lo siguiente:

$$\bar{R}_{fg} = \bar{R}_{ff}\bar{H}^T$$

y para $\bar{R}_{gg}$:

$$\bar{R}_{gg} = \bar{H}\bar{R}_{ff}\bar{H}^T + +\bar{H}\bar{R}_{nn}\bar{H}^T = \bar{H}(\bar{R}_{ff} + \bar{R}_{nn})\bar{H}^T$$

Sustituyendo en la definición del filtro de Wiener tendremos:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \bar{R}_{fg}\bar{R}_{gg}^{-1} \\ &= \bar{R}_{ff}\bar{H}^T[\bar{H}(\bar{R}_{ff} + \bar{R}_{nn})\bar{H}^T]^{-1} \end{aligned}$$

suponiendo que $\bar{H}$ es invertible, la ecuación anterior puede escribirse como:

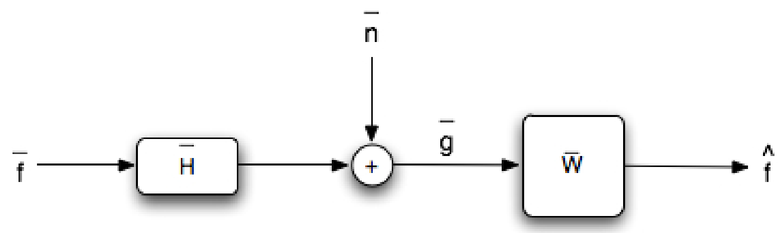
$$\begin{aligned}\bar{W} &= \bar{R}_{ff}\bar{H}^T[(\bar{H}^T)^{-1}(\bar{R}_{ff}+\bar{R}_{nn})^{-1}\bar{H}^{-1}]\\ &= \bar{R}_{ff}[\bar{H}(\bar{R}_{ff}+\bar{R}_{nn})]^{-1}\end{aligned}$$

que en el dominio de la frecuencia tendremos:

$$W(u,v) = \frac{S_{ff}(u,v)}{\bar{H}(u,v)[S_{ff}(u,v)+S_{nn}(u,v)]} \tag{4}$$

5.4. Caso 4: Pérdida de nitidez y ruido aditivo.

Figura 4: Pérdida de nitidez y ruido aditivo



La definición del filtro de Wiener es: $\bar{W} = \bar{R}_{fg}\bar{R}_{gg}^{-1}$. El modelo de degradación de la imagen es el siguiente $\bar{g} = \bar{H}\bar{f}+\bar{n}$, donde $\bar{g}^T = \bar{f}^T\bar{H}^T+\bar{n}^T$. Con estas últimas ecuaciones sustituimos en la definición del filtro de Wiener. Para $\bar{R}_{fg}$ tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{fg} &= E\{\bar{f}\bar{g}^T\} = E\{\bar{f}(\bar{f}^T\bar{H}^T+\bar{n}^T)\} = E\{\bar{f}\bar{f}^T\bar{H}^T\}+E\{\bar{f}\bar{n}^T\}\\ &= E\{\bar{f}\bar{f}^T\}\bar{H}^T+E\{\bar{f}\bar{n}^T\}\\ &= \bar{R}_{ff}\bar{H}^T+\bar{R}_{fn}\end{aligned}$$

y para $\bar{R}_{gg}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{gg} &= E\{\bar{g}\bar{g}^T\} = E\{(\bar{H}\bar{f}+\bar{n})(\bar{f}^T\bar{H}^T+\bar{n}^T)\} = E\{(\bar{H}\bar{f}+\bar{n})\bar{f}^T\bar{H}^T+(\bar{H}\bar{f}+\bar{n})\bar{n}^T\}\\ &= E\{\bar{H}\bar{f}\bar{f}^T\bar{H}^T+\bar{n}\bar{f}^T\bar{H}^T+\bar{H}\bar{f}\bar{n}^T+\bar{n}\bar{n}^T\}\\ &= \bar{H}E\{\bar{f}\bar{f}^T\}\bar{H}^T+E\{\bar{n}\bar{f}^T\}\bar{H}^T+\bar{H}E\{\bar{f}\bar{n}^T\}+E\{\bar{n}\bar{n}^T\}\\ &= \bar{H}\bar{R}_{ff}\bar{H}^T+\bar{R}_{nf}\bar{H}^T+\bar{H}\bar{R}_{fn}+\bar{R}_{nn}\end{aligned}$$

considerando que el ruido es estadísticamente independiente de la señal original, podemos simplificar el resultado.

$$\bar{R}_{fn} = \bar{R}_{nf} = 0$$

por lo que tendremos para $\bar{R}_{fg}$ lo siguiente:

$$\bar{R}_{fg} = \bar{R}_{ff}\bar{H}^T$$

y para $\bar{R}_{gg}$:

$$\bar{R}_{gg} = \bar{H}\bar{R}_{ff}\bar{H}^T+\bar{R}_{nn}$$

Sustituyendo en la definición del filtro de Wiener tendremos:

$$\begin{aligned}\bar{W} &= \bar{R}_{fg}\bar{R}_{gg}^{-1}\\ &= \bar{R}_{ff}\bar{H}^T[\bar{H}\bar{R}_{ff}\bar{H}^T+\bar{R}_{nn}]^{-1}\end{aligned}$$

suponiendo que $\bar{H}$ es invertible, la ecuación anterior puede escribirse en el dominio de la frecuencia como:

$$W(u,v) = \frac{S_{ff}(u,v)H^*(u,v)}{\bar{H}(u,v)S_{ff}(u,v)H^*(u,v)+S_{nn}(u,v)} \tag{5}$$