Procesos Estocásticos

Éstos se definen como los procesos dependientes de leyes causales y probabilísticas, por lo que están sometidos al azar y son objeto de análisis estadístico. Este tipo de procesos nos servirán para poder comprender la correlación, la cual se entiende estadísticamente como la relación entre varios datos, por ejemplo la estatura de los padres con los hijos.

Para este tipo de procesos debemos de definir lo que es el Valor Esperado :

$E\{x\}$ = Promedio = μ

$$E\{(x-\mu)^2\} = \sigma^2$$

(Varianza)

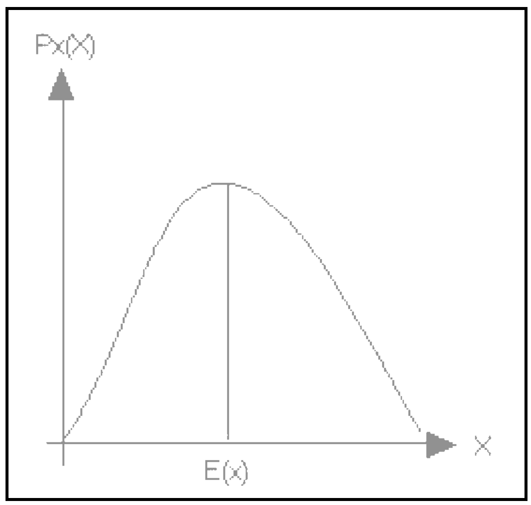

Figura 1 . Función de Densidad de Probabilidad

Así tenemos que la definición de Valor Esperado es:

$E\{ f(x) \} = \Sigma f(x) Px(x)$

Para una Distribución Normal Uniforme

$E\{x\} = \Sigma\ x (1/N) = (1/N) \Sigma x$ (Esto es un Promedio)

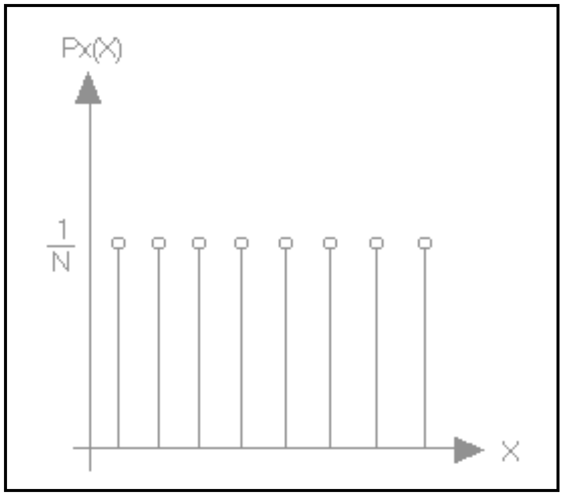

Figura 2. Distribución Normal Uniforme

Un proceso estocástico depende de un valor aleatorio y del tiempo como se puede observar en la figura 3.

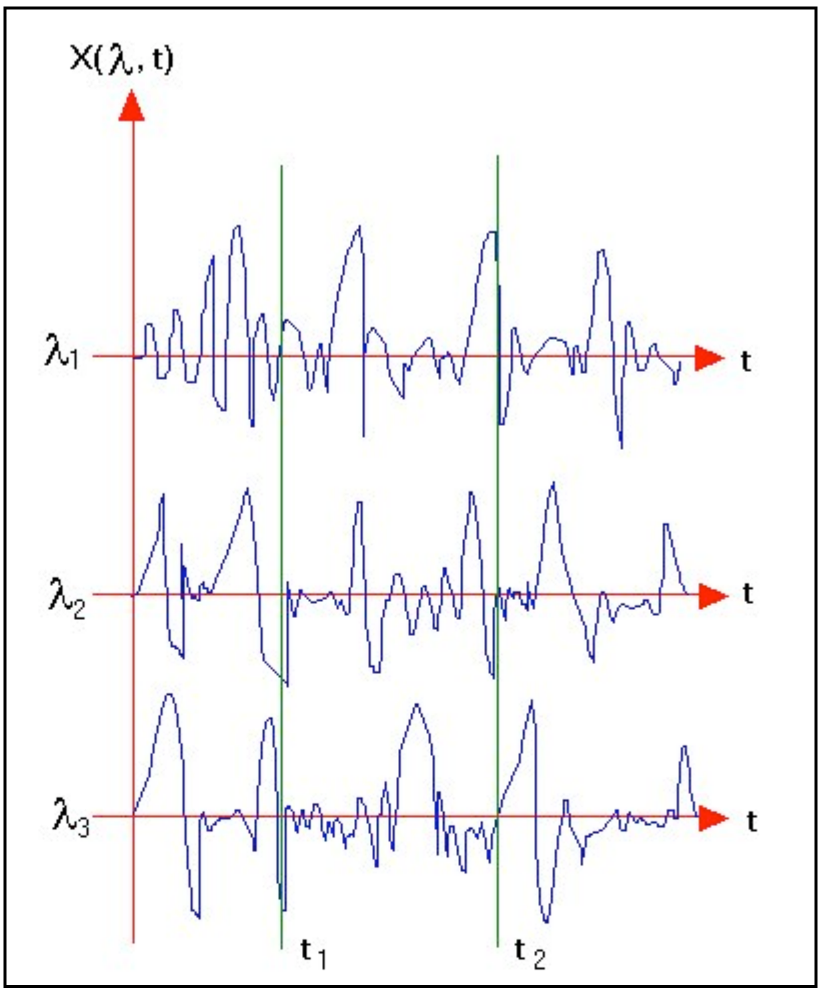

Figura 3. Proceso Estocástico

Todas las señales mostradas son diferentes pero pertenecen a un mismo proceso, si sumamos estos valores en un instante determinado por ejemplo en t_1, nos genera una variable aleatoria $x (\lambda , t_1) \Longrightarrow x (t_1)$ Así podemos observar que pueden generarse por ejemplo para dos instantes t_1 y t_2 , quedando las siguientes funciones de densidad de probabilidad.

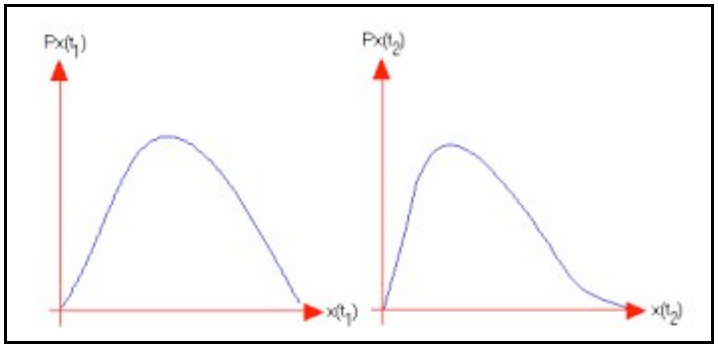

Figura 4. Funciones de Densidad de Probabilidad en t1 y t2

Si estas variables aleatorias tienen iguales valores, en un mismo instante y su esperanza y varianza iguales generan Procesos Estacionarios.

Así podemos definir la Autocorrelación, la cual compara dos variables aleatorias provenientes de un proceso estocástico y analiza sus diferencias, esto lo podemos expresar como:

$R_{xx} (t_1 , t_2) \Longrightarrow$ Proceso Estocástico x entre t_1 y t_2

Esto se define mediante el Valor Esperado como

$R_{xx} (t_1 , t_2) = E\{ x(t_1) x (t_2) \} = \Sigma\Sigma x (t1) x (t2) Pxt_1 Pxt_2 (x(t_1) x (t_2))$

Ahora si suponemos un proceso estacionario tenemos:

$R_{xx} (t_2 - t_1) = R_{xx} (\tau) = E \{ x (t) x(t + \tau) \} = \Sigma x(t) x(t + \tau) Px(x (t))$

Donde: $\tau = t_2 - t_1$

Lo único que cambia con la correlación cruzada es que se tienen dos procesos por ejemplo a y b

$R_{ab} (t_1 , t_2) = E\{ a (t_1) b (t_2) \} = \Sigma\Sigma a (t_1) b (t_2) Pat1 Pbt_2 (a (t_1) b (t_2))$

Algo que podemos observar en la figura 5 es que el valor máximo se encuentra en cero.

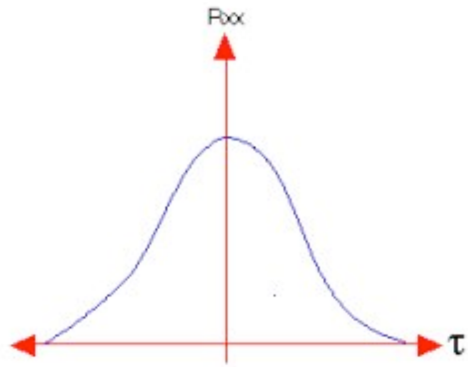

Figura 5. Función de Autocorrelación

En la figura 6 podemos observar la relación existente entre Rxx y Gxx y que la función de autocorrelación siempre tiene simetría par, por lo que siempre son reales .

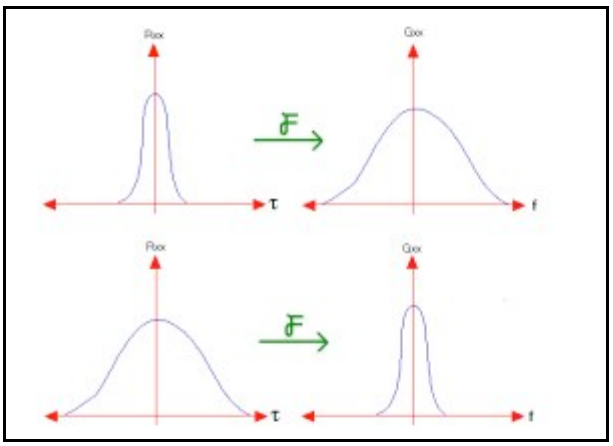

Figura 6. Densidad Espectral de Potencia

$G_{xx}(f) = F\,(\,R_{xx}\,(\,t\,)\,)$

Donde: $G_{xx}(f)$ es la Densidad Espectral de Potencia

Sin embargo, normalmente sólo tenemos una única realización, es decir λ_1 y no $\lambda_2 \ldots \lambda_n$. Para poder estimar lo anterior se debe suponer que el proceso sea ergódico, esto se logra por los promedios temporales que se denotan $E\{\}$ Quedando

$$< \mu > = 1/N \; S \; x\,(\,t\,)$$

$$< \sigma^2 >= \frac{1}{N^2} \sum (x(t) - < \mu >)^2$$

Un Proceso Ergódico se define como aquel proceso donde los promedios estadísticos son iguales a los temporales. Por lo que podemos ver que

$$< Rxx(\tau) >= \frac{1}{N^2} \sum x(t) x(t + \tau)$$

$$< Rxx(\tau) = F^{-1} < Gxx(f) >$$

Con lo cual podemos demostrar lo siguiente , que nos servirá más adelante.

$G_{XX}(f)$ = x (f) x *(f)