Procesamiento Digital de Imágenes

Apuntes del curso impartido por el Dr. Boris Escalante Ramírez

Agosto 2006

3. Análisis de Fourier en el Tiempo Discreto

La Transformada de Fourier es una de las herramientas matemáticas útiles en el análisis y el diseño de Sistemas Lineales Invariantes en el tiempo (SLI). Otra herramienta es la Serie de Fourier. Estas representaciones de la señal consisten básicamente en la descomposición de las señales en términos de componentes sinosoidales (o exponenciales complejas). Con dicha descomposición, se dice que la señal está representada en el *dominio de la frecuencia*.

Para aquellas señales pertenecientes a la clase de señales periódicas, a dicha descomposición se le llama **Serie de Fourier** y para la clase de señales pertenecientes a la clase de señales de energía finita , la descomposición es llamada **Transformada de Fourier**. El análisis para señales continuas en el tiempo y las señales que son discretas es muy similar; como trabajaremos con imágenes, nos enfocaremos al análisis de señales discretas. De la misma manera que en el capítulo anterior, empezaremos el análisis en una dimensión y posteriormente extenderemos los conceptos a dos dimensiones.

3.1. Representación de señales periódicas

3.1.1. La Serie de Fourier en tiempo discreto

Una señal discreta $x(n)$es periódica con periodo N si

$$x(n) = x(n+N) \tag{1}$$

para cualquier n.

El periodo fundamental es el entero positivo N más pequeño para el cual la ecuación anterior se satisface, por ejemplo, la exponencial compleja $e^{j(2\pi/N)n}$ es periódica con periodo N ya que:

$$e^{j(2\pi/N)n} = e^{j(2\pi/N)(n+N)} = e^{j(2\pi/N)n} e^{j(2\pi)} = e^{j(2\pi/N)n} \tag{2}$$

y cuya frecuencia fundamental es $\Omega o = 2\pi/N$.

El conjunto total de las señales exponenciales complejas discretas que son periódicas con periodo N y que están relacionadas armónicamente está dado por:

$$\phi_k(n) = e^{jk(2\pi/N)n} = e^{jk(\Omega_0)n} \tag{3}$$

donde $k = 0, \pm1, \pm2, , \pm\ldots$ . . Hay sólo N señales distintas en el conjunto dado por la ecuación anterior. Esto es consecuencia del hecho de que las exponenciales complejas discretas que difieren en frecuencia por un múltiplo de 2π son idénticas, es decir:

$$\phi_o(n) = \phi_1(n) = \phi_N(n) = \phi_{N+1}(n) \tag{4}$$

y de manera general:

$$\phi_k(n) = \phi_{k+N}(n) \tag{5}$$

Es decir, cuando k se cambia por cualquier múltiplo entero de N, se genera una secuencia idéntica. Ahora bien, se desea considerar la representación de secuencias periódicas más generales en términos de combinaciones lineales de las secuencias $\phi_k(n)$.

- La **Serie de Fourier** en el tiempo discreto está expresada como:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \phi_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \tag{6}$$

3.1.2. Determinación de la Serie de Fourier en el tiempo discreto

Determinar la Serie de Fourier se refiere al proceso mediante el cual obtenemos los coeficientes a_k de la Serie de Fourier. Para esto, se multiplica la ecuación de la Serie de Fourier en el tiempo discreto (6) por $e^{-jr(2\pi/N)n}$ y se suman los N términos a ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \Bigg] \cdot e^{-jr(2\pi/N)n} && (7) \\ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jr(2\pi/N)n} &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n} && (8) \\ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jr(2\pi/N)n} &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} && (9) \end{aligned}$$

pero

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & \text{Si } k-r = 0, \pm N, \pm 2N, ... \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \tag{10}$$

Es decir, $\phi_k(n)$ es un conjunto de funciones ortogonales. Por lo tanto la ecuación (9) se reduce a:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jr(2\pi/N)n} = N a_r \tag{11}$$

despejando a N:

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jr(2\pi/N)n}. \tag{12}$$

3.1.3. Resumen y ejemplos

En resumen la **Serie de Fourier en el tiempo discreto** esta dada por:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \tag{13}$$

Los **coeficientes espectrales** a_k de la **Serie de Fourier en el tiempo discreto** (realizando un cambio de variable r por k, en la ecuación (12)) están dados por:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n} \tag{14}$$

donde la Serie de Fourier en el tiempo discreto tiene las siguientes características:

- a_k son los coeficientes espectrales de $x(n)$
- es una serie finita de N términos
- el intervalo de k es desde 0 hasta $N-1$ o cualquier conjunto de N enteros consecutivos.

Ejemplo: sea $x(n) = a_0\phi_0(n) + a_1\phi_1(n) + ... + a_{N-1}\phi_{N-1}(n)$ una serie finita de $N-1$ términos.

$$\begin{aligned} x(n) &= a_0\phi_0(n) + a_1\phi_1(n) + ... + a_{N-1}\phi_{N-1}(n) && (15) \\ &= a_1\phi_1(n) + a_2\phi_2(n) + ... + a_N\phi_N(n) \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} \phi_k(n) &= \phi_{k+N}(n) \ \ \text{y} \\ a_0 &= a_N \end{aligned}$$

Por lo que en general tendremos:

$$\begin{aligned} \phi_k(n) &= \phi_{K+N}(n) \\ &\text{y} \\ a_k &= a_{k+N} \end{aligned} \tag{16}$$

Ejemplo: Sea $x(n) = sen(\Omega_0 n)$,

- Si $2\pi/\Omega_0$ es un número irracional, entonces $x(n)$ no es periódica y por lo tanto, la Serie de Fourier no existe.
- Si $2\pi/\Omega_0$ es un número racional, entonces $x(n)$ es periódica.

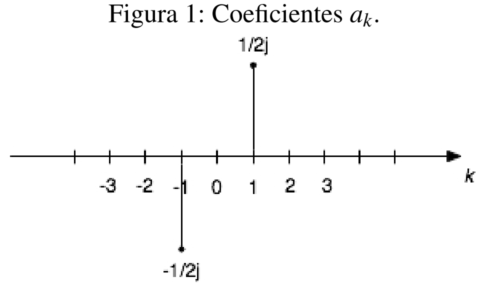
Supongamos que $2\pi/\Omega_0 = N$, entonces $x(n)$ es periódica con periodo N y:

$$x(n) = \frac{1}{2j}e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j}e^{-j(2\pi/N)n}$$

considerando a la ecuación de la Serie de Fourier es fácil deducir que los coeficientes a_k corresponden a:

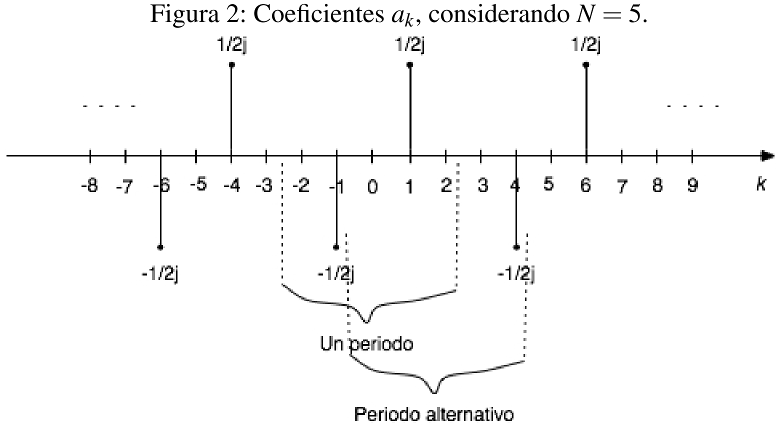
$$a_1 = \frac{1}{2j} \qquad \text{y} \qquad a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

Figura 1: Coeficientes a_k.



Si ahora consideramos que el periodo de la señal es $N = 5$ se tendría la siguiente representación:

Figura 2: Coeficientes a_k, considerando $N = 5$.



Ahora supongamos que $\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{N}{m} \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ donde m y N no poseen factores comunes. El periodo de la señal es N, entonces:

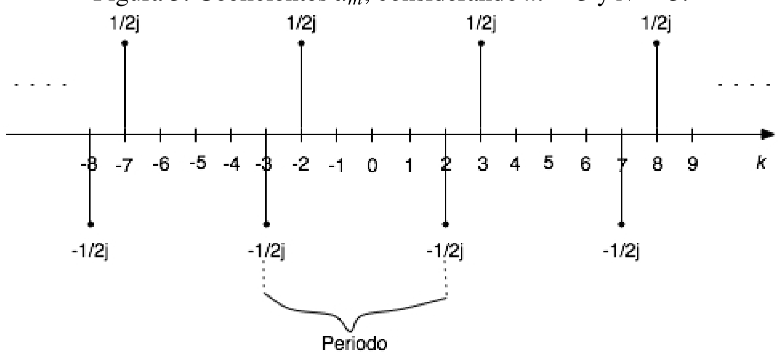
$$x(n) \quad = \quad \frac{1}{2j} e^{jm(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-jm(2\pi/N)n}$$

lo que implica que

$$a_m = \frac{1}{2j} \qquad \text{y} \qquad a_{-m} = -\frac{1}{2j}$$

Si ahora consideramos $m = 3$ y $N = 5$ tendríamos la siguiente gráfica:

Figura 3: Coeficientes a_m, considerando $m = 3$ y $N = 5$.

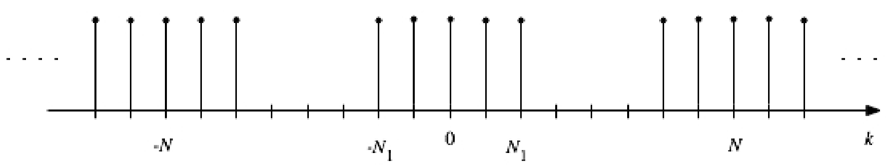


Del resultado anterior podemos ver que si $x(n)$ es real, entonces:

$$a_{-k} = a_k * \tag{17}$$

que es lo que se conoce como la **Serie Trigonométrica de Fourier** en el tiempo discreto.

Ejemplo: Supóngase la señal de la siguiente figura:



De la ecuación de los coeficientes espectrales de la serie de Fourier tendremos que:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n} \tag{18}$$

sustituyendo $m = n + N_1$ se tiene:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} \qquad (19) \\ &= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m} \end{aligned}$$

podemos encontrar la parte $\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m}$ usando la siguiente fórmula:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \text{Si } \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \text{Si } \alpha \neq 1 \end{cases} \tag{20}$$

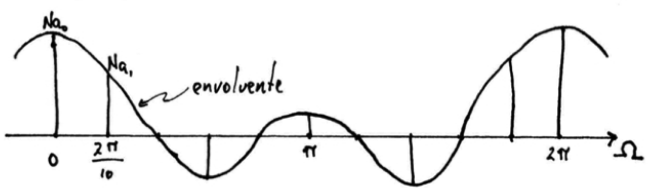
por lo que se tendría:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \left[\frac{1-e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1-e^{-jk(2\pi/N)}} \right] \\
&= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/2N)}[e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}]}{e^{-jk(2\pi/2N)}[e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)}]} \\
&= \frac{1}{N} \frac{sen[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{sen(2\pi k/2N)} \quad \text{para } k \neq 0, \pm N, \pm 2N, ... \\
&\text{y} \\
a_k &= \frac{2N_1+1}{N} \quad \text{para } k = 0, \pm N, \pm 2N, ...
\end{aligned} \tag{21}$$

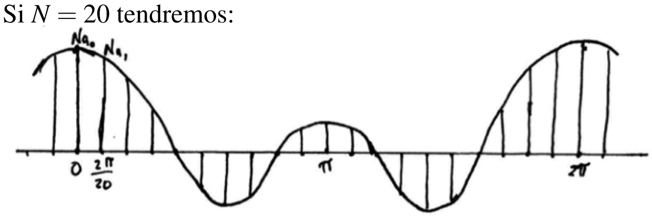
o bien

$$Na_k = \frac{sen[(2N_1+1)\Omega/2]}{sen(\Omega/2)} \Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}} \tag{22}$$

Suponiendo que $2N_1+1=5$. Tomando $N=10$ tendremos:



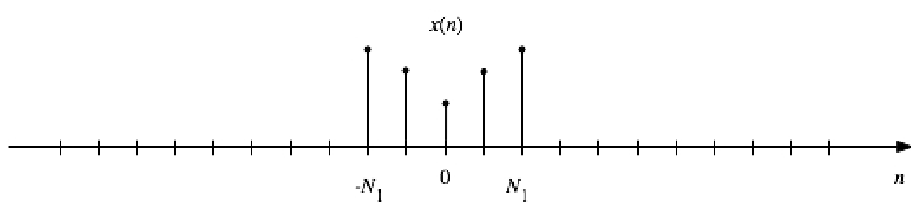
Si $N=20$ tendremos:



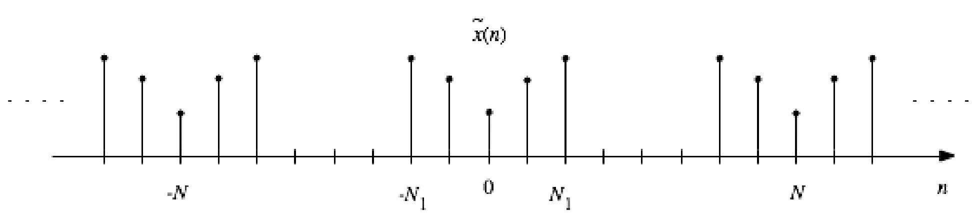
3.2. Representación de señales aperiódicas

3.2.1. La Transformada de Fourier en el tiempo discreto

Sea $x(n)$ una señal discreta no periódica como se muestra a continuación:



$x(n)$ es una secuencia que tiene duración finita. Esto es, la señal $x(n)=0$ fuera del intervalo $-N_1 \leq n \leq N_1$. Supongamos ahora que la señal es periódica como se muestra a continuación:



Una aproximación para poder representar las señales no periódicas como señales periódicas es hacer que el periodo sea más grande, es decir; $\tilde{x}(n)$ es idéntica a $x(n)$ sobre un intervalo más grande y entonces podemos obtener la Serie de Fourier de la señal aproximada, de la siguiente manera:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \tag{23}$$

y con la misma aproximación encontrar los coeficientes a_k:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}(n) e^{-jk(2\pi/N)n} \tag{24}$$

Debido a que $x(n) = \tilde{x}(n)$ dentro del intervalo $|n| < N_1$ entonces podemos sustituir $\tilde{x}(n)$ por $x(n)$ en nuestra aproximación:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n} \tag{25}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n} \tag{26}$$

Como la envolvente de $x(n)$ es

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \tag{27}$$

entonces podemos reescribir los coeficientes $a_k$como:

$$a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0) \tag{28}$$

donde $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$. Sustituyendo la ecuación (28) en la ecuación (23) tendremos:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \tag{29}$$

como $\Omega_0 = 2\pi/N$ o bien $\frac{1}{N} = \frac{\Omega_0}{2\pi}$ entonces sustituimos en la ecuación (29)

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0 \tag{30}$$

Si $N \to \infty$, entonces $\tilde{x}(n) = x(n)$ y $\Omega_0 \to 0$. De la ecuación (30) tendremos que la variable discreta $k\Omega_0$ tiende a Ω, que es una variable continua:

$$k\Omega_0 \to \Omega$$

es decir, la ecuación (30) puede escribirse cambiando la suma por una integral cuyo rango (N intervalos de $\frac{2\pi}{N}$) es ahora 2π:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \tag{31}$$

la cual se conoce como **ecuación de síntesis** mientras que:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \tag{32}$$

se conoce como **ecuación de análisis** y $X(\Omega)$ representa el espectro de $x(n)$.

Para la existencia de la Transformada de Fourier se deben cumplir dos condiciones; que la señal $x(n)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \tag{33}$$

sea absolutamente sumable y que además:

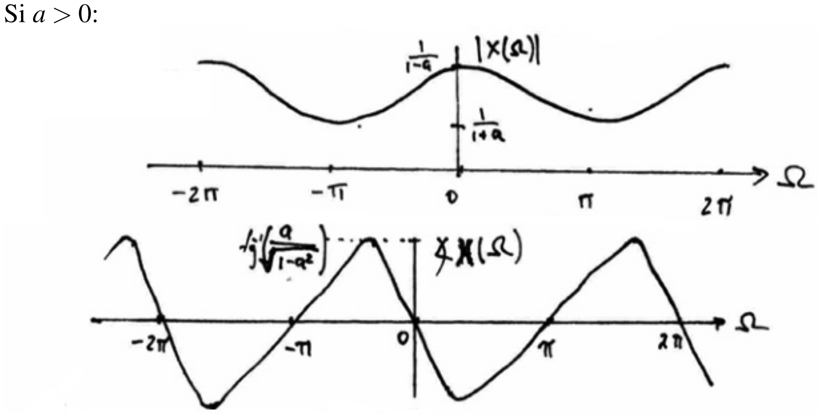
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \tag{34}$$

la señal sea de energía finita.

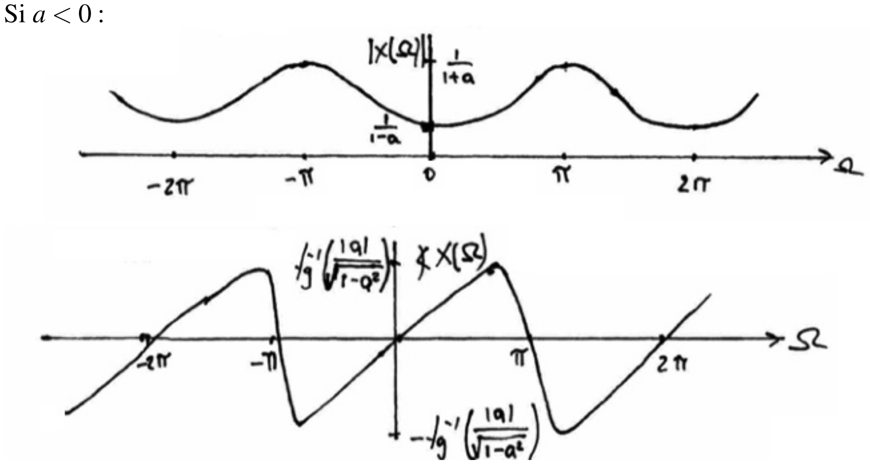
Ejemplo: $x(n) = a^n u(n)$ donde $|a| < 1$. Usando la ecuación de análisis tendremos

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

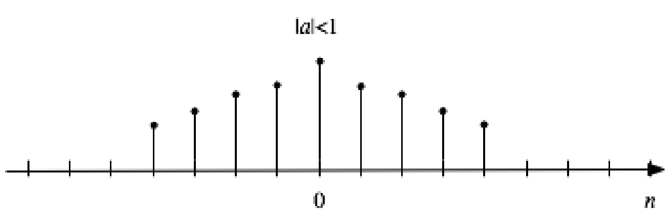
Si $a > 0$:



Si $a < 0$:



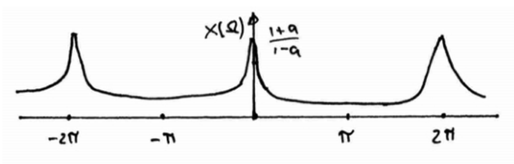
Ejemplo: $x(n) = a^{|n|}$ donde $|a| < 1$



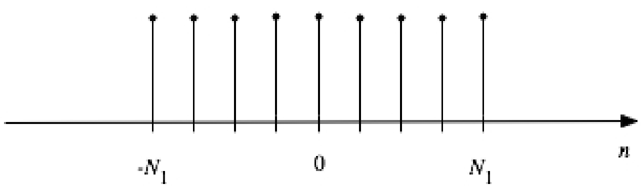
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\Omega n}$$

sustituyendo $m=-n$ en la segunda suma tendremos:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\Omega})^n + \sum_{m=1}^{\infty}(ae^{j\Omega})^m \\ &= \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} + \frac{1}{1-ae^{j\Omega}} - 1 \\ &= \frac{1-a^2}{1-2acos(\Omega)+a^2} \end{aligned}$$



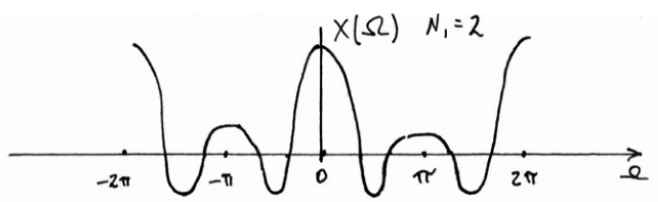
Ejemplo: $x(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$.



$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n}$$

sustituyendo $m = n + N_1$ tendremos:

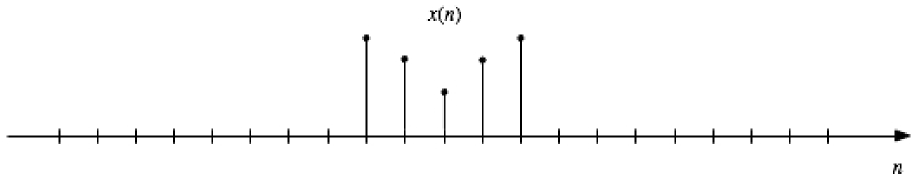
$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\Omega(m-N_1)} = e^{j\Omega N_1}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\Omega m} \\ &= e^{j\Omega N_1}\frac{1-e^{-j\Omega(2N_1+1)}}{1-e^{-j\Omega}} \\ &= \frac{e^{j\Omega N_1}e^{-j\Omega(N_1+1/2)}[e^{j\Omega(N_1+1/2)} - e^{-j\Omega(N_1+1/2)}]}{e^{-j\Omega/2}[e^{-j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}]} \\ &= \frac{sen[\Omega(N_1+1/2)]}{sen(\Omega/2)} \end{aligned}$$

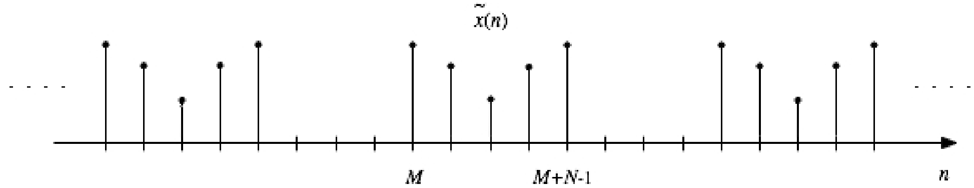


3.3. La transformada de Fourier en el tiempo discreto para señales periódicas

3.3.1. Coeficientes de la Serie de Fourier como muestras de la Transformada de Fourier de un periodo

Como se había visto antes, es posible escribir los coeficientes de la Serie de Fourier como muestras de la Transformada de Fourier de un periodo de la siguiente manera:





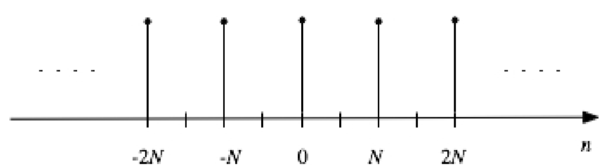
$$Na_k = X(k\frac{2\pi}{N})$$

donde a_k son los coeficientes de la serie de Fourier de $\tilde{x}(n)$ y $X(\Omega)$ es la Transformada de Fourier de $x(n)$. Por esta razón, Na_k son muestras de la Transformada de Fourier de un periodo.

Ejemplo: Sea la señal

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$$

como se muestra en la siguiente figura:



Los coeficientes de la Serie de Fourier de $\tilde{x}(n)$ quedan como:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N}$$

Si

$$x_1(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otros valores de } n \end{cases}$$

es decir, $\tilde{x}_1(n) = \delta(n)$ y tendremos que:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n}|_{n=0} = 1$$

por lo tanto se verifica que $Na_k = X_1(k\frac{2\pi}{N})$.
Si

$$x_2(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & 1 \leq n \leq N \\ 0 & \text{otros valores de } n \end{cases}$$

es decir, $\tilde{x}_2(n) = \delta(n - N)$ y tendremos que:

$$X_2(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega N}$$

donde $X_1(\Omega) \neq X_2(\Omega)$, sin embargo, en las frecuencias de muestreo $\Omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, se cumple que

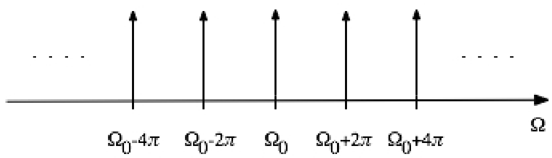
$$Na_k = X_2(k\frac{2\pi}{N}) = X_1(k\frac{2\pi}{N})$$

3.3.2. La transformada de Fourier para señales periódicas discretas

Consideremos la señal

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) \tag{35}$$

como se muestra en la siguiente figura:



¿Cómo se puede encontrar $x(n)$? Usando la ecuación de síntesis vista anteriormente, ecuación (31):

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \tag{36}$$

Sustituyendo (35) en (36):

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l)e^{j\Omega n}d\Omega \tag{37}$$

Si escogemos el intervalo de integración que abarca el impulso en $\Omega = \Omega_0 + 2\pi r$, entonces:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = e^{j(\Omega_0+2\pi r)n} \\ &= e^{j\Omega_0 n} \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $x(n) = b_1e^{j\Omega_1 n} + b_2e^{j\Omega_2 n} + \ldots + b_me^{j\Omega_m n}$, entonces:

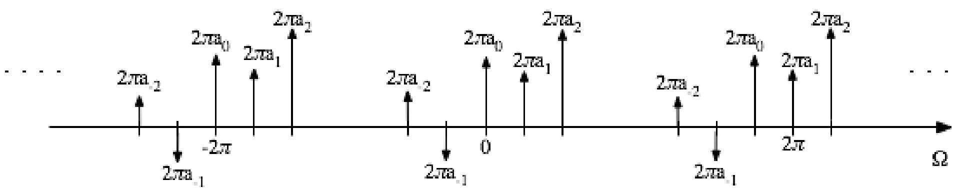
$$\begin{aligned} X(\Omega) &= b_1\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_1 - 2\pi l) + \\ &\quad +b_2\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_2 - 2\pi l) + \\ &+ \quad \ldots \quad +b_m\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_m - 2\pi l) \end{aligned} \tag{38}$$

es un tren de impulsos periódicos con impulsos en Ω_1, Ω_2, ..., Ω_m y en múltiplos de 2π de estas frecuencias. $x(n)$ no es necesariamente periódica. Es periódica solo si $\Omega_i = \frac{2\pi m_i}{N}$. Supongamos periodicidad:

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \\ &= a_0 + a_1e^{j(2\pi/N)n} + a_2e^{j2(2\pi/N)n} + \ldots + a_{N-1}e^{j(N-1)(2\pi/N)n} \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= a_0\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - 2\pi l) + a_1\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \frac{2\pi}{N} - 2\pi l) \\ &+\ldots \quad +a_{N-1}\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - (N-1)\frac{2\pi}{N} - 2\pi l) \end{aligned} \tag{40}$$

es decir:

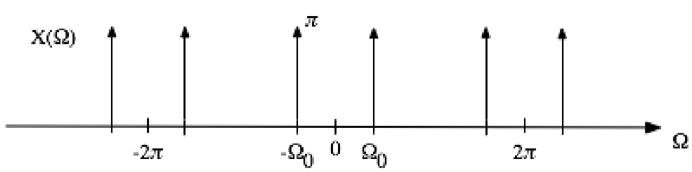


Debido a la periodicidad de a_k,

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}) \tag{41}$$

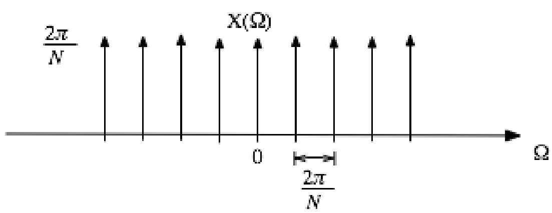
Ejemplo: La señal $x(n) = cos(\Omega_0 n) = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 n}$,

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi[\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)]$$



Ejemplo: La señal $x(n) = \sum_{k=-N}^{N} \delta(n - kN)$, los coeficientes $a_k = \frac{1}{N}$, entonces:

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$$



3.4. Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo discreto

1. Periodicidad en Ω con periodo $T = 2\pi$:
$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega) \tag{42}$$
2. Linealidad:
$$ax_1(n) + bx_2(n) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega) \tag{43}$$
3. Simetría: Si $x(n)$ es real entonces
$$X(\Omega) = X^*(-\Omega) \tag{44}$$
por lo tanto
$$\mathbb{R}\mathrm{e}\{X(\Omega)\} \quad \text{es par}$$
$$\mathbb{I}\mathrm{m}\{X(\Omega)\} \quad \text{es impar}$$

4. Desplazamiento en tiempo y frecuencia

$$
\begin{aligned}
x(n) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \\
x(n-n_0) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega n_0}X(\Omega) \\
e^{j\Omega_0 n}x(n) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega-\Omega_0)
\end{aligned}
\tag{45}
$$

5. Diferenciación y sumatoria

$$
\begin{aligned}
\text{Si } x(n) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)\text{, entonces} \\
x(n)-x(n-1) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (1-e^{-j\Omega})X(\Omega)
\end{aligned}
$$

considere:

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{n} x(m) \\
\text{observando que } y(n)-y(n-1) &= x(n) \\
\text{entonces: } \sum_{m=-\infty}^{n} x(m) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)+\pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)
\end{aligned}
\tag{46}
$$

donde $\pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$ es el valor de DC resultante de la sumatoria.
Ejemplo: Sea $x(n)=\delta(n) \Rightarrow X(\Omega)=1$

$$
u(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m)
$$

entonces:

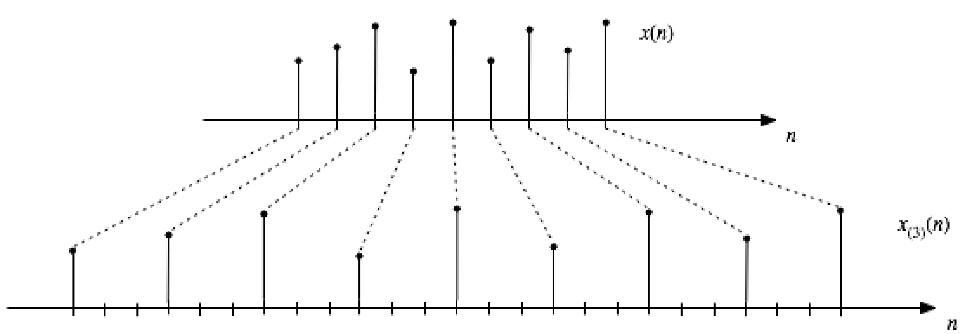
$$
u(n) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)
$$

6. Escalamiento en tiempo y frecuencia

$$
\begin{aligned}
\text{Si } x(n) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \\
\text{considere } y(n) &= x(-n) \\
Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-j\Omega n} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{j\Omega m} = X(-\Omega) \\
\text{Resumiendo: } x(-n) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(-\Omega)
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Considere ahora

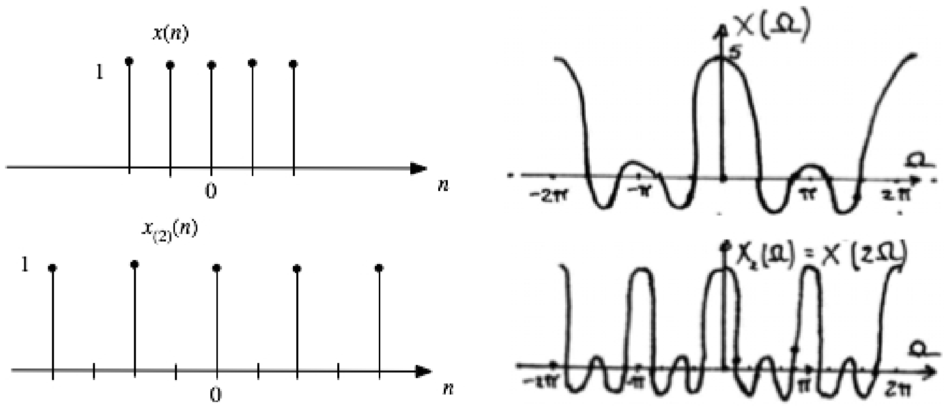
$$
x_{(k)}(n) = \begin{cases} x(n/k) & \text{si } n \text{ es múltiplo de } k \\ 0 & \text{si } n \text{ no es múltiplo de } k \end{cases}
$$



entonces:

$$
\begin{aligned}
X_{(k)}(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{(k)}(rk)e^{-j\Omega rk} \\
&= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)e^{-j(k\Omega)r} = X(k\Omega) \\
&\Rightarrow \quad x_{(k)}(n) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega)
\end{aligned} \tag{48}
$$

Ejemplo:



7. Diferenciación en frecuencia

$$
\begin{aligned}
\text{Sea} \quad x(n) \quad &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(\Omega) \\
X(\Omega) \quad &= \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \text{ entonces} \\
\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \quad &= \quad -\sum_{n=-\infty}^{\infty} jnx(n)e^{-j\Omega n} \\
j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \quad &= \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)e^{-j\Omega n}
\end{aligned}
$$

y por lo tanto:

$$
nx(n) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \tag{49}
$$

8. Relación de Parseval:

$$
\begin{aligned}
\text{Sea} \quad x(n) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(\Omega) \quad \text{entonces} \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega
\end{aligned} \tag{50}
$$

donde:

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \;\text{ es la energía de } x(n)
$$

y

$$
|X(\Omega)|^2 \;\text{ es el epectro de densidad de energía}
$$

Para señales periódicas, la energía es infinita. Para estos casos:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x(n)|^2 \quad = \quad \sum_{k=<N>}|a_k|^2 \tag{51}$$

donde

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x(n)|^2 \text{ es la potencia contenida en un periódo}$$

y a_k son los coeficientes de la **Serie de Fourier**.

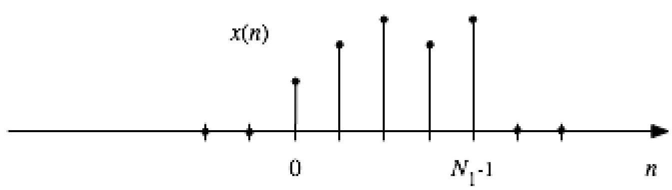
4. Representación de señales de duración finita: Transformada Discreta de Fourier (DFT)

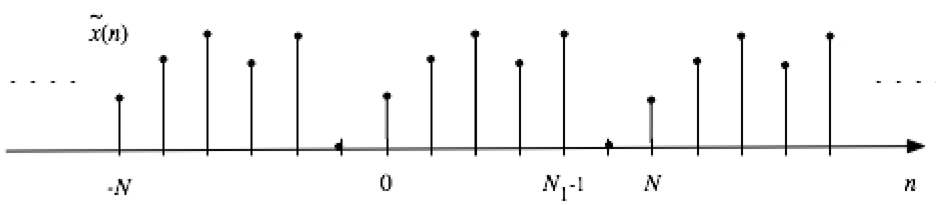
La transformada discreta de Fourier (DFT, por sus siglas en inglés Discrete Fourier Transform) provee un método para transformar los datos muestreados en el dominio del tiempo a una expresión de estos datos en el dominio de la frecuencia. La inversa de la transformada reinvierte este proceso, convirtiendo los datos en el dominio de la frecuencia en datos en el dominio temporal. Estas transformaciones pueden ser aplicadas en una gran variedad de campos desde la geofísica hasta la astronomía, desde el análisis de señales de sonido hasta el análisis de la concentración de CO_2 en la atmósfera.

Esta transformada puede ser calculada eficientemente en computadora digital usando los algoritmos de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) que veremos posteriormente.

Sea $x(n)$ una señal de duración finita como se muestra a continuación:

$x(n)$ es una señal finita y no periódica. Sin embargo, como se había visto se puede aproximar la función $x(n)$ como una señal periódica $\tilde{x}(n)$ en un intervalo:





donde el periodo de la señal $\tilde{x}(n)$ es $N \geq N_1$.

$$\tilde{x}(n) = x(n) \text{ en el intervalo } 0 \leq n \leq N_1 - 1$$

De la Serie de Fourier para $\tilde{x}(n)$ podemos encontrar sus coeficientes:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\tilde{x}(n)e^{-jk(2\pi/N)n}$$

pero si escogemos el intervalo $0 \leq n \leq N-1$ es posible obtener los coeficientes para $x(n)$:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk(2\pi/N)n} \tag{52}$$

Si multiplicamos la ecuación (52) por N tendremos la **DFT** de $x(n)$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk(2\pi/N)n}, \text{ para } k = 0, 1, ..., N-1 \tag{53}$$

mientras que su inversa, la **IDFT** (Inversa de la Transformada Discreta de Fourier) se puede obtener de la serie de Fourier como:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk(2\pi/N)n}, \text{ para } n = 0, 1, ..., N-1 \tag{54}$$

- donde $X(k)$ es periódica con periodo N
- y $x(n)$ puede interpretarse como periódica con periodo N

La relación que existe entre la DFT y la Transformada de Fourier para señales discretas la podemos ver a continuación: Sea $x(n) = a^n$ para $0 \leq n \leq N-1$, entonces la DFT es:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j(2\pi/N)nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} [ae^{-j(2\pi/N)k}]^n \\ &= \frac{1-a^N}{1-ae^{-j(2\pi/N)k}} \text{ para } 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \tag{55}$$

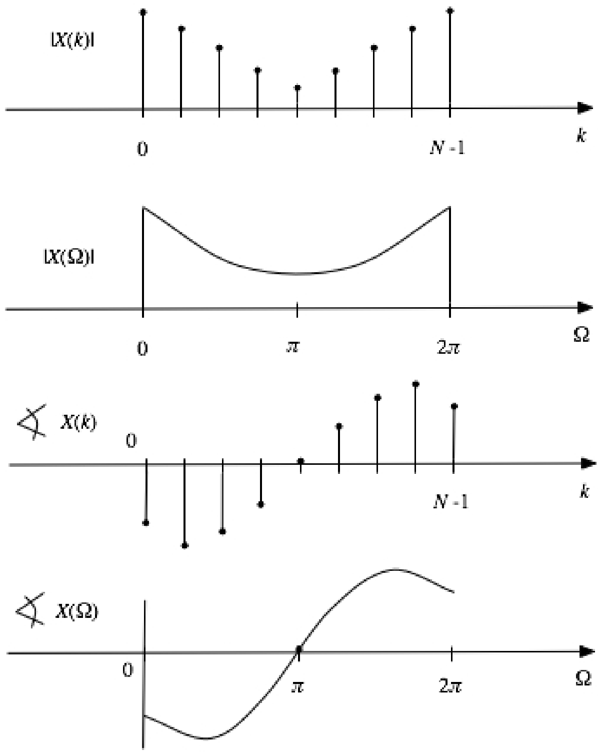
Ahora, la Transformada de Fourier queda como:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1-a^N e^{-j\Omega N}}{1-ae^{-j\Omega}} \end{aligned} \tag{56}$$

Si comparamos $X(k)$ y $X(\Omega)$ observamos que:

$$X(k) = X(\Omega)\Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}} \tag{57}$$

es decir, los coeficientes $X(k)$ son muestras de $X(\Omega)$ espaciadas $\frac{2\pi}{N}$ radianes:



5. Transformada rápida de Fourier

La transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés Fast Fourier Transform) provee un algoritmo eficiente para implementar la DFT en computadora. Esta transformada es fácilmente ejecutada y de hecho, es incluida en casi cualquier paquetería de software matemático como función [2][3]. Muchos libros están dedicados únicamente a la FFT y diferentes versiones de la FFT han sido propuestas; así mismo la investigación para hacer estos algoritmos más eficientes aún continua y es un campo abierto. Por ejemplo, el algoritmo de Cooley-Tukey hace la FFT bastante útil reduciendo el número de cálculos de algo del orden n^2 a $nlog(n)$ con lo cual obviamente el tiempo computacional es reducido considerablemente. El método de descomposición usado en el algoritmo de Cooley-Tukey puede ser aplicado a otras transformaciones ortogonales como la Hadamard, Hartley y la Haar.

Como regla, los datos a ser transformados consisten de N puntos uniformemente separados $x_j = x(t_j)$, donde $N = 2^n$ con n entero y $j = j \cdot \Delta t$ donde j varía de 0 a $N-1$. Aunque algunas implementaciones de la FFT no requieren que N sea una potencia de 2, este número de puntos es, sin embargo, el óptimo para la velocidad de ejecución del algoritmo. A pesar de que algún conjunto de datos no tenga precisamente un número de datos igual a 2^n, la técnica de zero padding provee un medio para alcanzar este número de muestras sin pérdida de información. Ya que muchos flujos de datos son reales, limitamos nuestro análisis a las series de tiempo reales. Cuando los datos en el dominio temporal son reales, los valores de las amplitudes o del espectro de potencia en cualquier frecuencia negativa son los mismos que aquellos en su frecuencia positiva correspondiente. Entonces si la serie en el tiempo es real, una mitad de las 2^n frecuencias contiene toda la información frecuencial, es decir, $N/2$+1 muestras.

Recordando, la DFT está definida como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)nk}, \text{ para } k = 0, 1..., N-1$$

podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk}, \text{ para } k = 0, 1..., N-1 \tag{58}$$

donde $W = e^{-j(2\pi/N)}$. Sabemos que W^{nk} es periódica con periodo N:

$$W^{(n+mN)(k+lN)} = W^{nk}, \text{ para } m,l = 0,\pm1,\pm2,...$$

Como notación a partir de ahora usaremos W_N en lugar de W. Supongamos que $x(n)$ es una secuencia en $0 \leq n \leq N-1$ donde N es potencia de 2. Entonces:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x(2n), n = 0,1,...,\frac{N}{2}-1 \qquad \text{pares} \\ x_2(n) &= x(2n+1), n = 0,1,...,\frac{N}{2}-1 \quad \text{impares} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta estas consideraciones, podemos reescribir $X(k)$ como:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{\substack{n=0 \\ (n \text{ par})}}^{N-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{\substack{n=0 \\ (n \text{ impar})}}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k} \end{aligned} \tag{59}$$

observamos que:

$$W_N^2 = [e^{j(2\pi/N)}]^2 = e^{[2\pi/(N/2)]} = W_{N/2}$$

entonces,

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n)W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n)W_{N/2}^{nk} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \end{aligned} \tag{60}$$

donde

$$\begin{aligned} x_1(n) &\overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X_1(k) \\ x_2(n) &\overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X_2(k) \end{aligned}$$

Realizando una evaluación sobre el número de operaciones que se necesitan hacer para el cálculo de la $X(k)$ usando la ecuación (58):

- El número de multiplicaciones es $(N-1)^2$ mientras que el número de sumas: $N(N-1)$

Si evaluamos el número de operaciones para calcular $X(k)$ usando la ecuación (60):

- El número de multiplicaciones es $N + (\frac{N}{2})^2 \cdot 2 = N + \frac{N^2}{2}$

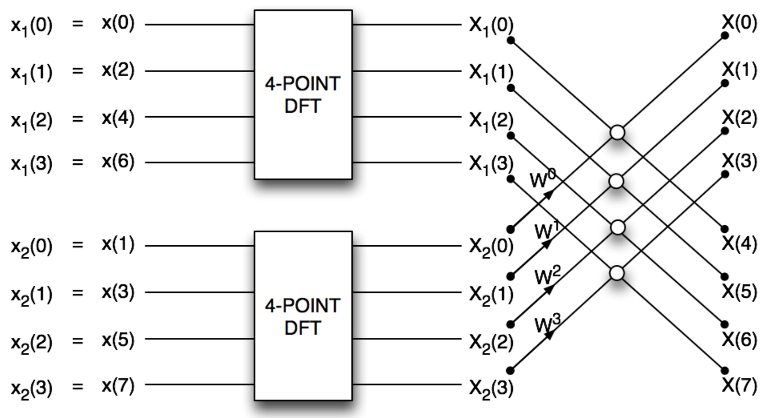
Si N es grande, se tendrá un ahorro del 50% de multiplicaciones. $X_1(k)$ y $X_2(k)$ están definidas en el intervalo $0 \leq k \leq \frac{N}{2}-1$. $X(k)$ está definida en $0 \leq k \leq N-1$. ¿Cómo encontramos $X(k)$ para $\frac{N}{2} \leq k \leq N-1$?

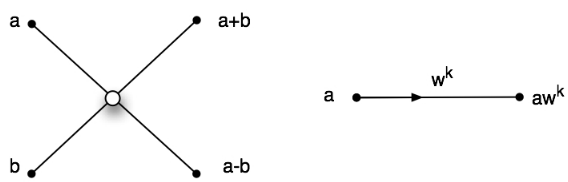
$$X(k) = \begin{cases} X_1(k) + W_N^k X_2(k), & 0 \leq k \leq \frac{N}{2}-1 \\ \\ X_1(k-\frac{N}{2}) + W_N^k X_2(k-\frac{N}{2}), & \frac{N}{2} \leq k \leq N-1 \end{cases} \tag{61}$$

pero $W_N^{k+\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{N}{2})} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}e^{-j\pi} = -e^{-\frac{2\pi}{N}k} = -W_N^k$. Por lo tanto:

$$X(k) = \begin{cases} X_1(k) + W_N^k X_2(k), & 0 \leq k \leq \frac{N}{2}-1 \\ \\ X_1(k-\frac{N}{2}) + W_N^{k-\frac{N}{2}} X_2(k-\frac{N}{2}), & \frac{N}{2} \leq k \leq N-1 \end{cases} \tag{62}$$

Ejemplo: $N = 8$. Observe la separación entre pares e impares.



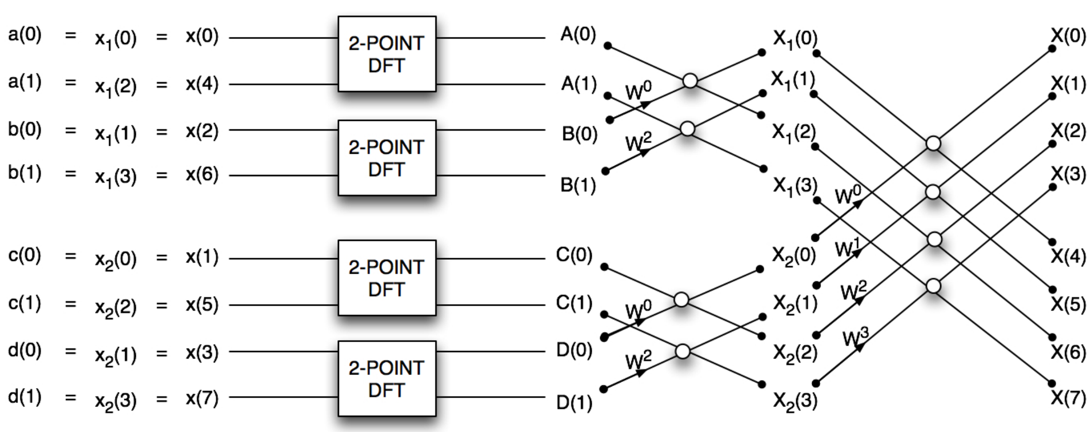


Operación mariposa

Si iteramos el proceso del ejemplo anterior, $x_1(n)$ y $x_2(n)$ se dividen cada una en dos secuencias, una par y otra impar.

Por ejemplo: $X_1(k)$ para $0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$:

$$
\begin{aligned}
X_1(k) &= A(k) + W_{N/2}^{k} B(k) \\
&= A(k) + W_N^{2k} B(k)
\end{aligned}
$$

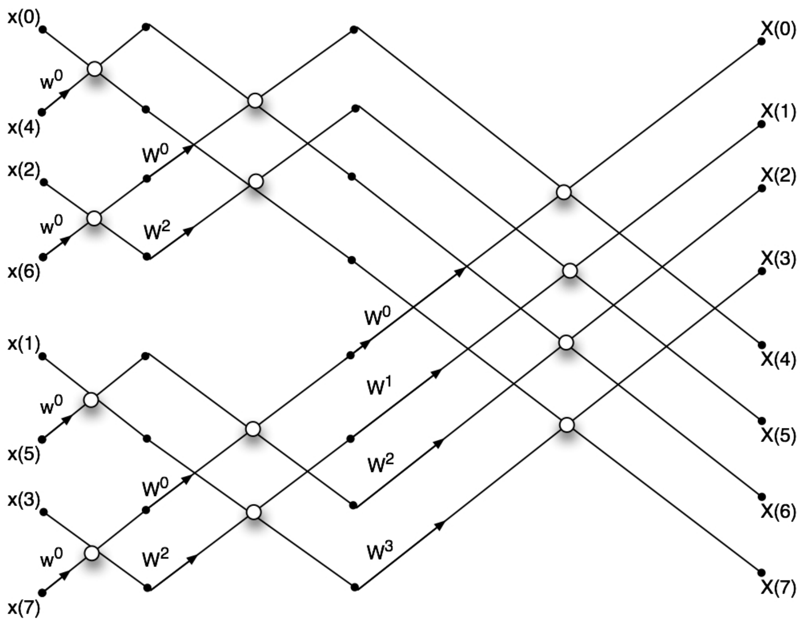


De esta manera, una DFT de N elementos (N potencia de 2) se reduce a varias DFT's de 2 elementos. Una DFT de 2 elementos se efectúa sin multiplicaciones. Por ejemplo: $a(n)$, $n = 0, 1$ entonces:

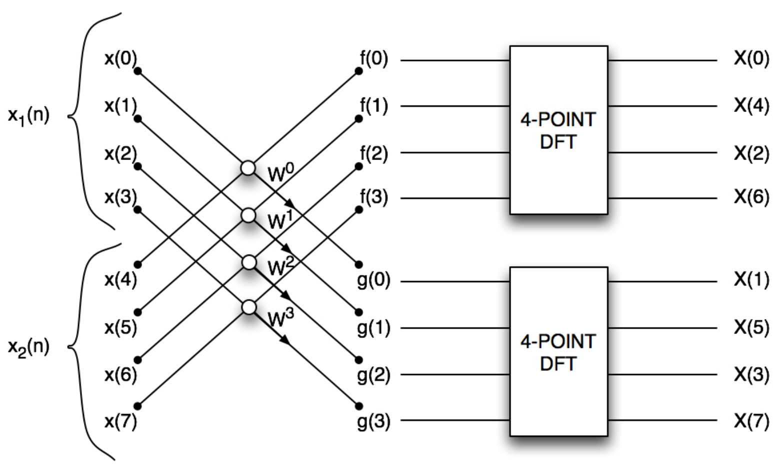
$$
\begin{aligned}
A(0) &= a(0) + a(1) W_8^0 \\
A(1) &= a(0) + a(1) W_8^4
\end{aligned}
$$

pero $W_8^0 = 1$ y $W_8^4 = -1$.

En resumen se presenta el siguiente algoritmo llamado algoritmo de **decimación en tiempo**.



El número de multiplicaciones de este algoritmo es del orden $\approx \frac{N}{2} log_2 N$. Sin embargo, las multiplicaciones involucrando $W_N^0(1)$, $W_N^{N/2}(-1)$, $W_N^{N/4}(j)$, $W_N^{3N/4}(-j)$ son realmente sumas y restas complejas. Para calcular la FFT solamente se requiere una localidad de memoria extra. El operador (llamado "mariposa") para el algoritmo de decimación en tiempo se muestra a continuación:



Existe también otro algortimo llamado de **decimación en frecuencia**.

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x(n), \qquad n = 0, 1, \ldots \frac{N}{2} - 1 \\ x_2(n) &= x(n + \frac{N}{2}), \qquad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned}$$

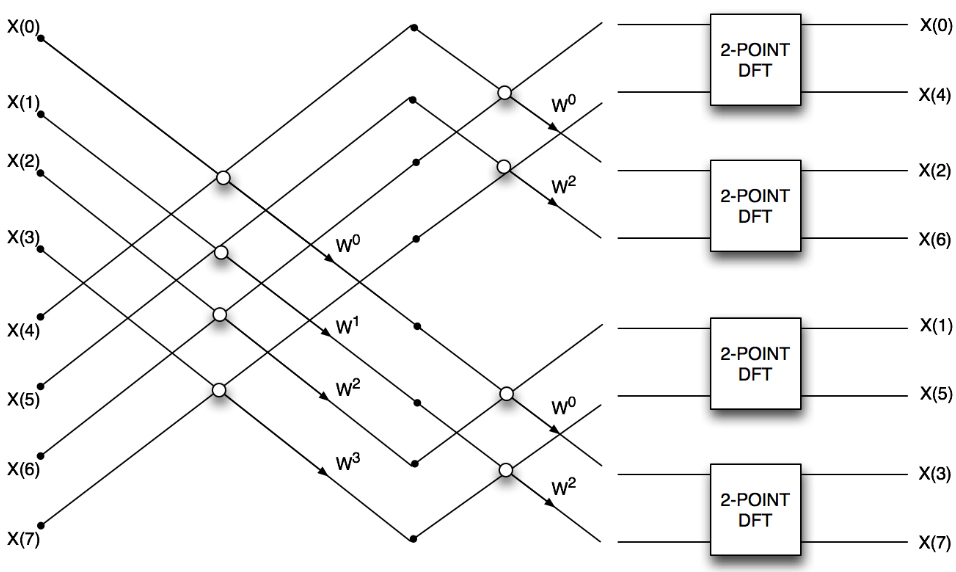
la DFT de $x(n)$ la podemos expresar como:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n)W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n)W_N^{(n+\frac{N}{2})k} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) + e^{-j\pi k}x_2(n)]W_N^{nk} \end{aligned}$$

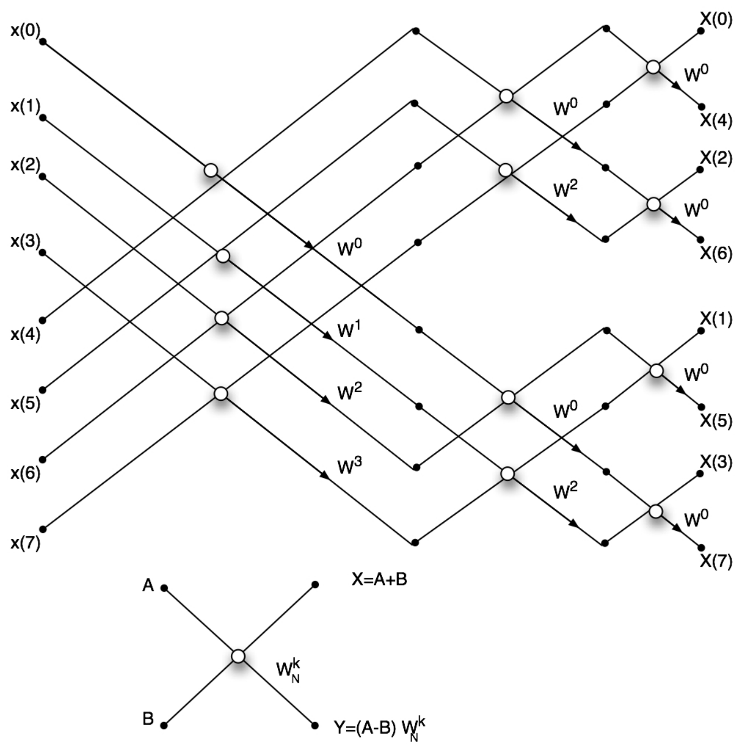
considerando elementos pares e impares de $X(k)$ tendremos:

$$\begin{aligned} X(2k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n)+x_2(n)](W_N^2)^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n)+x_2(n)]W_{N/2}^{nk} \\ X(2k+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n)-x_2(n)]W_N^{n(2k+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \{[x_1(n)-x_2(n)]W_N^n\}W_{N/2}^{nk} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X(2k)$ se obtiene de la DFT de $N/2$ elementos de $f(n) = x_1(n)+x_2(n)$, $n = 0,1,...,\frac{N}{2}-1$ y $X(2k+1)$ se obtiene de la DFT de $N/2$ elementos de $g(n) = [x_1(n)-x_2(n)]W_N^n$, $n = 0,1,...\frac{N}{2}-1$



Iterando este proceso se obtiene:



Operación mariposa para el algoritmo de decimación en frecuencia

En resumen:

- Decimación en frecuencia: Los valores de entrada en orden natural, los valores a la salida se obtienen en orden inverso.
- Decimación en tiempo: Los valores de entrada en orden de bits invertidos, los valores a la salida se obtienen en orden natural.

Orden Natural	Binario	Binario Invertido	Orden Invertido
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

6. Cálculo de la Transformada Inversa Discreta de Fourier (IDFT) por medio de la Transformada Directa Discreta de Fourier (DFT)

La IDFT está definida como:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W^{-nk} \tag{63}$$

$$Nx^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W^{nk} \tag{64}$$

aquí es importante notar que la DFT de $X^*(n)$ puede ser calculada con el mismo algoritmo de la FFT. Por lo tanto:

$$x(n) = \frac{1}{N}[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W^{nk}]^* \tag{65}$$

Apéndice A. Identidad de Euler

Una señal compleja en su forma polar o exponencial está representada como:

$$s(t) = Ae^{(j\omega t+\phi)}$$

donde ω es la frecuencia de la señal, ϕ es la fase y A es la magnitud o amplitud de la señal. $s(t)$ puede escribirse como:

$$s(t) = Ae^{j\omega t}e^{j\phi}$$

de tal manera que la identidad de Euler da la siguiente representación rectangular equivalente:

$$s(t) = Acos(\omega t+\phi) + jsen(\omega t+\phi)$$

Referencias

[1] Gonzalez, R. C. , and Woods, P., *Digital Image Processing*, Addison Wesley, 2002.

[2] D. Donnelly and B. Rust, "The Fast Fourier Transform for Experimentalists Part I: Concepts", *Computing in Science & Eng.*, vol. 7, no. 2, 2005, pp. 80-88.

[3] FFTW, www.fftw.org