Convolución y Filtrado
Parte 2

Jimena Olveres Montiel
Boris Escalante Ramírez

U.N.A.M. Facultad Ingeniería.
Laboratorio Avanzado de Procesamiento de Imágenes
Edificio de Posgrado e Investigación 2º piso,
Ciudad Universitaria, México, D.F., 04510
Tel: +52-55-56161719
http://lapi.fi-p.unam.mx

TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS * MÉXICO · 2011

1

1

Filtro Binomial orden N

Caso discreto en 1D :

$$f_L^{(n)}(x) = \nabla^n C_{L-n}^x = \nabla^n \binom{L-n}{x} = \nabla^n \left(\frac{(L-n)!}{x!(L-n-x)!} \right)$$

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-1) = f^{(1)}(x) \qquad x = 0, 1, \ldots, L$$

Triángulo de Pascal :
(primera derivada)

$$f_2^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f_4^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

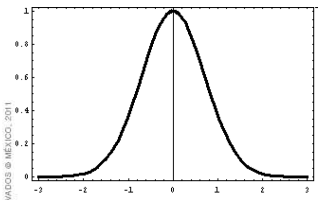
L							
1				1	–1		
2			1	0	–1		
3		1	1	–1	–1		
4	1	2	0	–2	–1		

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

2

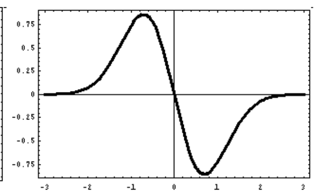
3.2.2. Operadores de bordes.

- Otra forma más sencilla (aproximada) es usar máscaras de convolución adecuadas, por ejemplo de **Laplace**.
- La **función de Laplace** es la segunda derivada de la gaussiana.



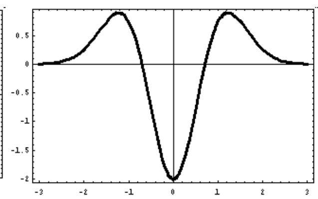
$f(x) = e^{-x^2/s^2}$

Másc. Gaussiana Operador de suavizado



$df(x)/dx$

Másc. Sobel Operador de derivación



$d^2f(x)/dx^2$

Másc. Laplaciana Operador de gradiente

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

3

3.2.2. Operadores de bordes.

- La máscara **laplaciana** se define usando la función de Laplace.
- Ejemplos de **máscaras de Laplace**.

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

"Diferencia entre el píxel central y la media de sus vecinos..."

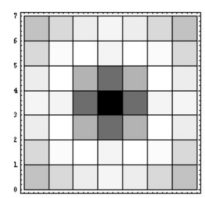


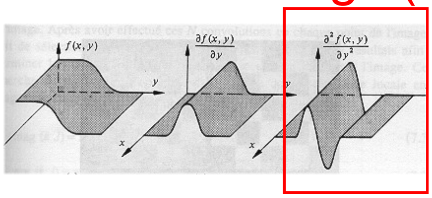
Imagen de entrada

Laplaciana 2 (3x3)

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

4

Zero-Crossings (the Laplacian filter)



Instead of the maxima of the gradient we search the zero crossings of the second derivative.

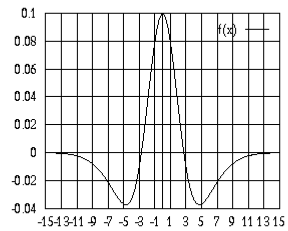
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

The laplacian operator

Usually, the image smoothed (e.g. with a Gaussian filter) before calculating the derivative. Using the properties of convolution, this can be done in one step:

$$\nabla^2(f \otimes h) = (\nabla^2 f) \otimes h = f \otimes (\nabla^2 h)$$

The “mexican hat” filter:



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

5

The Laplacian filter: properties

Advantages:
- Closer to mechanisms of visual perception (ON/OFF cells)
- One parameter only (size of the filter)
- No threshold
- Produces closed contours

Disadvantages:
- Is more sensitive to noise (usage of second derivative)
- No information on the orientation of the contour

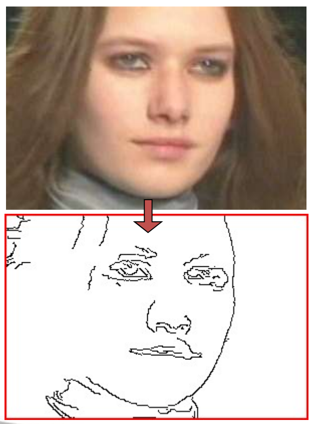
Combination of gradient and contour
- Search of zero-crossings of the Laplacian in the neighborhood of local maxima of the gradient

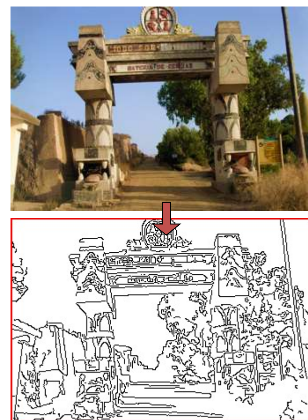
UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

6

3.2.2. Operadores de bordes.

- **Detector de bordes de Canny**:
  - No sólo usa convoluciones (operadores de gradiente), sino que busca el **máximo gradiente** a lo largo de un borde.
  - El resultado es una **imagen binaria** (borde/no borde), ajustable mediante un umbral.



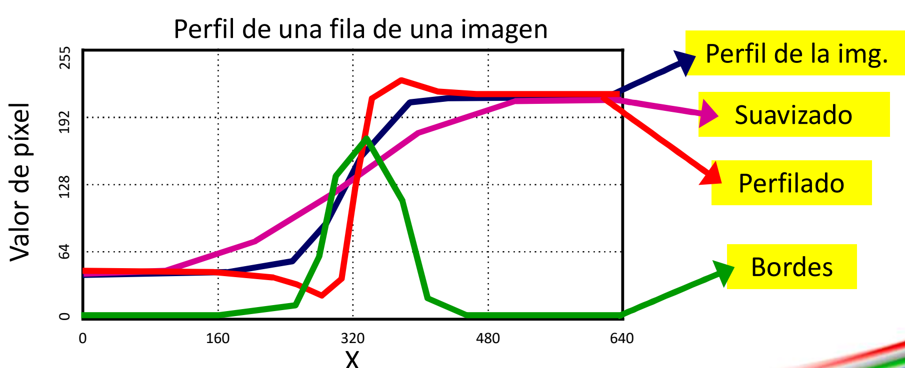


UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

7

3.2.2. Operadores de bordes.

- **Perfilado** y **detección de bordes** están relacionados con el suavizado:
  - **Suavizado**: reducir las variaciones en la imagen.
  - **Bordes**: encontrar las zonas de variación.
  - **Perfilado**: aumentar las variaciones en la imagen.



UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

8

3.2.3. Operadores de perfilado.

- **Perfilado:** destacar y hacer más visibles las variaciones y bordes de la imagen. Es lo contrario al suavizado.
- Permite eliminar la apariencia borrosa de las imágenes, debida a imperfecciones en las lentes.
- ... aunque tampoco se pueden hacer milagros...

← Suavizado Original Perfilado →

9

Perfilado- Mejoramiento de la Nitidez

- Corresponde a la mejora de la calidad visual de una imagen
- Se basa en los filtros “ unsharp masking ” o filtros de enmascaramiento de imagen borrosa

Principio :

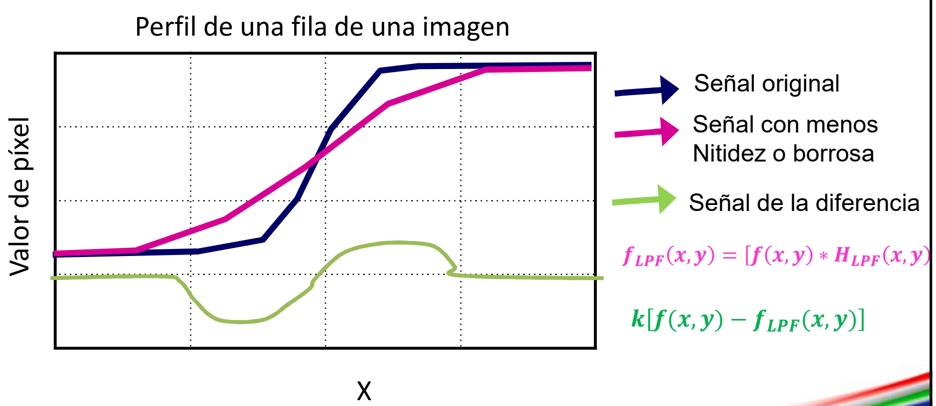
Añadir detalles (frecuencias altas) a una imagen borrosa (frecuencias bajas)

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

10

Filtro Unsharp Masking

- Se tiene una imagen borrosa (pendiente pequeña) = f
- Se le resta con una pendiente aún más pequeña = f_{LPF}
- Lo anterior se multiplica por un factor = k (entre 1 y 3)

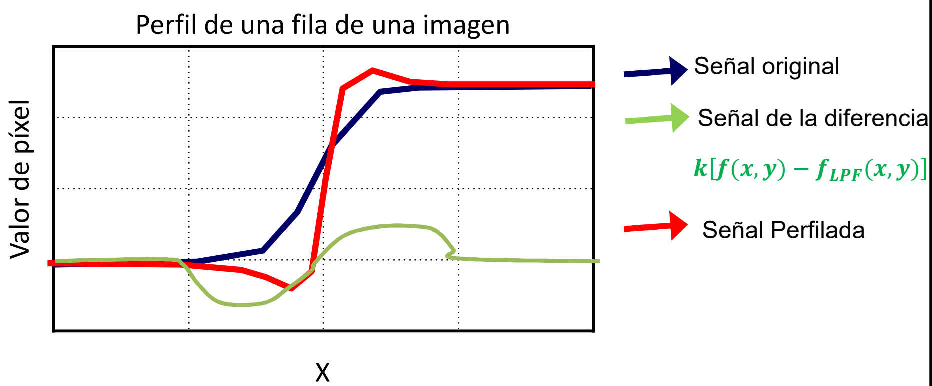


UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

11

Filtro Unsharp Masking

- La señal de la diferencia anterior se suma a la original



$$k[f(x,y) - f_{LPF}(x,y)] + f(x,y) = f(x,y) \otimes h_{UM}(x,y)$$

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

12

Filtro Unsharp Masking

- Se tiene una imagen borrosa (pendiente pequeña) = f
- Se le resta con una pendiente aún más pequeña = f_{LPF}
- Lo anterior se multiplica por un factor = k (entre 1 y 3)
- La señal de la diferencia anterior se suma a la original

⇨ señal con mayor resolución (pendiente grande)

$$k[f(x,y) - f_{LPF}(x,y)] + f(x,y) = f(x,y) \otimes h_{UM}(x,y)$$

Nótese que :

$$f_{HPF}(x,y) = f(x,y) - f_{LPF}(x,y)$$

con $k = 1$:

$$f(x,y) + f_{HPF}(x,y) = f(x,y) \otimes h_{UM}(x,y)$$

= imagen mejorada

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

13

Filtro Unsharp Masking

$$\boldsymbol{f(x,y) + k[f(x,y) - f_{LPF}(x,y)] = f(x,y) \otimes h_{UM}(x,y)}$$

$$\boldsymbol{\delta(x,y) + k[\delta(x,y) - h_{LPF}(x,y)]}$$

$$\delta(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{UM}(x,y) = (1+k)\delta(x,y) - kh_{LPF}(x,y)$$

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

14

Filtro Unsharp Masking

De lo anterior se obtiene la definición del filtro Unsharp Masking $h_{UM}(x, y)$:

$$h_{UM}(x,y) = (1+k)\delta(x,y) - kh_{LPF}(x,y)$$

- La forma del filtro Unsharp Masking $h_{UM}(x, y)$ depende de la forma del filtro paso-bajas $h_{LPF}(x, y)$

Ejemplo :

si $h_{LPF}(x,y) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

entonces

$$h_{UM}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{k}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{9}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8+9/k & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

15

3.2.3. Operadores de perfilado.

- El perfilado se puede conseguir sumando a la imagen **original**, la **laplaciana** ponderada por cierto factor.
- Lo cual equivale a usar una máscara de convolución adecuada:

1· Laplaciana + Identidad = Perfilado

-1	-1	-1		0	0	0		-1	-1	-1
-1	8	-1	+	0	1	0	=	-1	9	-1
-1	-1	-1		0	0	0		-1	-1	-1

- Más o menos perfilado dando distintos pesos, **a**.

k·

0	-1	0		0	0	0		0	-k	0
-1	4	-1	+	0	1	0	=	-k	4k+1	-k
0	-1	0		0	0	0		0	-k	0

Ojo: la función cvLaplace usa máscaras "invertidas", luego **a** debe ser < 0

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

16

3.2.3. Operadores de perfilado.

- **Ejemplos.** Variando pesos y tamaño de la laplaciana.

Imagen de entrada

Perfilado 33%, 3x3

Perfilado 60%, 1x1

Perfilado 15%, 7x7

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

17

3.2.3. Operadores de perfilado.

- **Cuidado con el perfilado.** La operación de perfilado aumenta el nivel de ruido de la imagen.

Imagen con ruido por interferencias TV

Perfilado 33%, 3x3

Imagen con ruido por compresión JPEG

Perfilado 60%, 3x3

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

18

3.2. Suavizado, perfilado y bordes.

Conclusiones:

- Las **convoluciones** son una herramienta fundamental en procesamiento de imágenes.
  - **Una misma base común**: combinaciones lineales de una vecindad local de los píxeles (de cierto tamaño).
  - **Diversos usos**: según los valores de los coeficientes: suavizado, eliminación de ruido, bordes, perfilado, etc.
- Se pueden definir **operaciones similares** sobre **vídeo** (usando la dimensión temporal, por ejemplo, suavizado a lo largo del tiempo), y sobre **audio digital** (por ejemplo, suavizado de la señal o introducción de eco).
- Es importante conocer el **significado matemático** de los procesos aplicados (derivadas, gradientes, integrales,...).

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

19

3.3. Filtros no lineales.

- **Recordatorio:** las transformaciones locales son funciones del tipo:

  R(x,y):= f(A(x-k,y-k), ..., A(x,y), ..., A(x+k,y+k))

- En las convoluciones, **f** es una **combinación lineal** cualquiera. Pero...
- También puede ser interesante usar otras **funciones no lineales**.
- **Ejemplo**, media geométrica.

  $R(x,y) := \sqrt[4]{A(x-1,y-1)\cdot A(x,y-1)\cdot A(x-1,y)\cdot A(x,y)}$

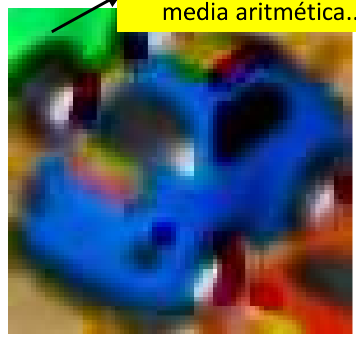
UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

20

3.3. Filtros no lineales.

- **Ejemplo.** Media geométrica de 5x5.

... muy parecido a la media aritmética...



- Aunque existen muchas (en teoría infinitas) posibles transformaciones no lineales, en la práctica no todas son útiles e interesantes.
- Las que más se usan son: **máximo**, **mínimo** y **mediana**.

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

21

3.3. Filtros no lineales.

- **Filtro de Máximo:**
  R(x,y):= max {A(x-k,y-k), ..., A(x,y), ..., A(x+k,y+k)}
  donde **k** es el radio, el tamaño (o *apertura*) es **2k+1**

Imagen de entrada

Máximo, tamaño 3

Máx., tamaño 6

Máx., tamaño 12

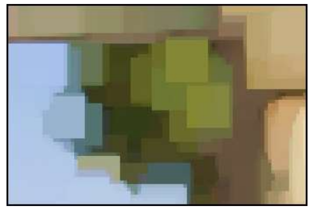
UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

22

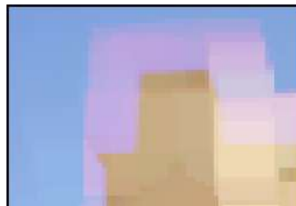
3.3. Filtros no lineales.

- El resultado es un cierto efecto de **difuminación** y **aclaramiento** de la imagen. Desaparecen los detalles más oscuros.
- Si el **tamaño es grande**, pueden ocurrir dos efectos:

1. **Efecto de cuadriculado.** Como el máximo se aplica en una zona cuadrada, los píxeles muy claros *generan* un cuadrado uniforme alrededor.



2. **Aparición de colores falsos.** Al aplicarlo en los tres canales (R,G,B) independientemente, el máximo en los 3 puede no corresponder a un color presente en la imagen original.



UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

23

3.3. Filtros no lineales.

- **Filtro de Mínimo:**
  R(x,y):= min {A(x-k,y-k), ..., A(x,y), ..., A(x+k,y+k)}
  donde **k** es el radio, el tamaño (o *apertura*) es **2k+1**

Imagen de entrada

Mínimo, tamaño 3

Mín., tamaño 6

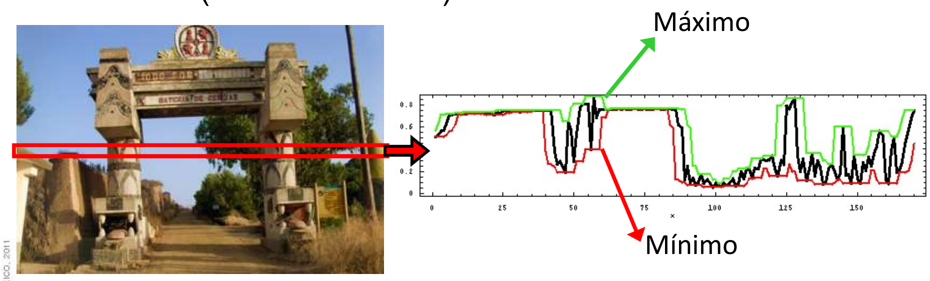
Mín., tamaño 12

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

24

3.3. Filtros no lineales.

- El efecto es **parecido** al máximo, pero tomando los valores menores (los más oscuros).



- **Ideas:**
  - Para evitar el **efecto de cuadriculado** se podría aplicar el máximo/mínimo a una zona circular.
  - Para evitar la aparición de **colores falsos** se podría tomar el máximo de las sumas de R+G+B.

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

25

3.3. Filtros no lineales.

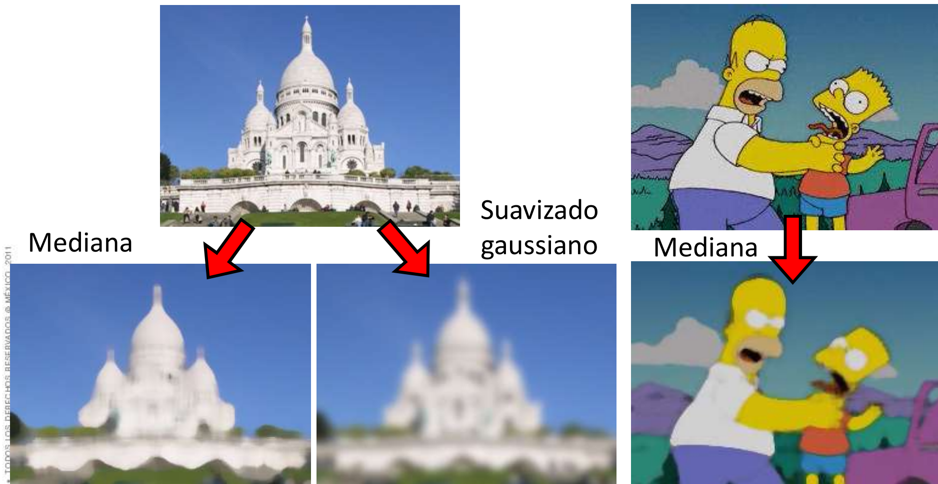
- Otro filtro relacionado es el de la **mediana**.
- **La mediana** de **m** números es un número **p** tal que $\lceil \mathbf{m}/2 \rceil$ de esos números son ≤ **p**, y otros $\lfloor \mathbf{m}/2 \rfloor$ son ≥ **p**.
  R(x,y):= mediana {A(x-k,y-k), ..., A(x,y), ..., A(x+k,y+k)}

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

26

3.3. Filtros no lineales.

- La mediana produce un efecto de **suavizado**, aunque más “abrupto” en los bordes que la media y el suavizado gaussiano.



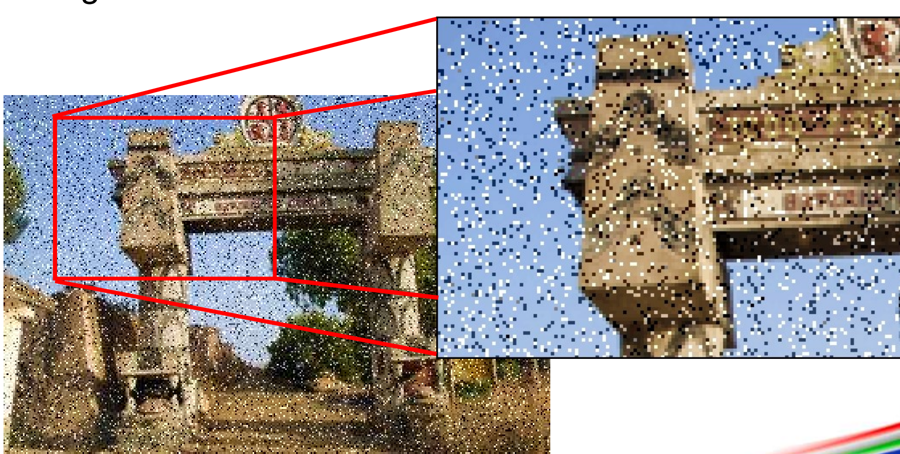
- Pero el verdadero interés es la **eliminación de ruido** puntual.

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

27

3.3. Filtros no lineales.

- **Ejemplo.** El ruido denominado “sal y pimienta” es producido por picos de perturbación, positivos o negativos. Puede deberse a un canal ruidoso.



UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

28

3.3. Filtros no lineales.

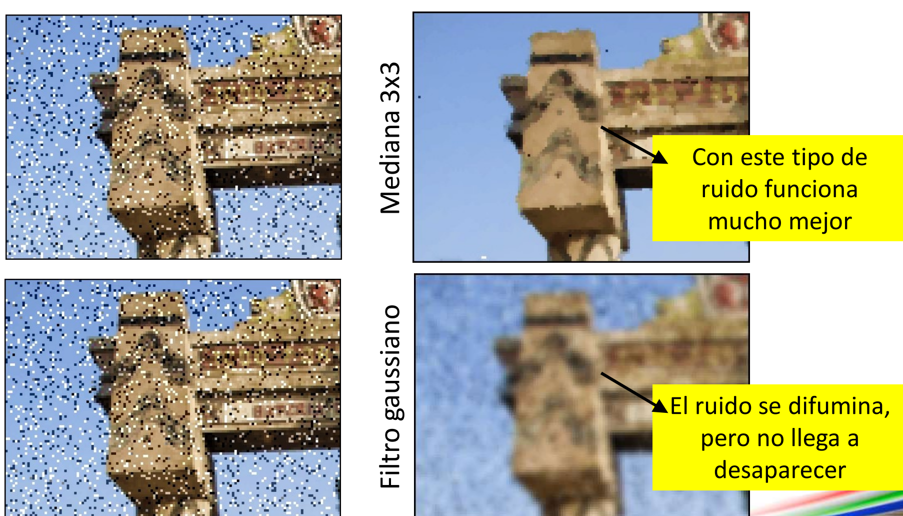
- Se puede intentar eliminar (o reducir) el ruido con un filtro gaussiano o con una mediana.

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

29

3.3. Filtros no lineales.

- Se puede intentar eliminar (o reducir) el ruido con un filtro gaussiano o con una mediana.



UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

30

3.3. Filtros no lineales.

- **Otros ejemplos** de eliminación de ruido.

Mediana 7x7

Mediana 7x3

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

31

3.3. Filtros no lineales.

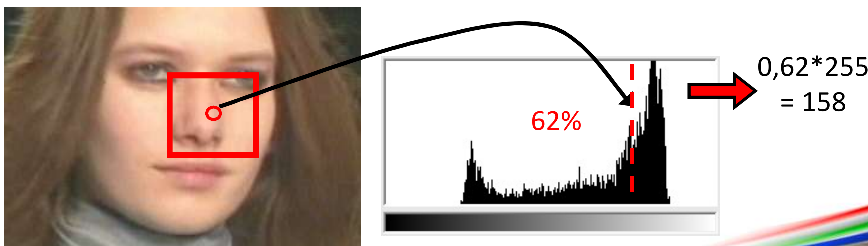
- **Más filtros no lineales:** recordar la ecualización local del histograma.
  - Considerar una **operación global** como el estiramiento, la ecualización del histograma o la umbralización.
  - **Globalmente** se calculan los parámetros y se aplican a **toda la imagen**: estiramiento (máximo y mínimo del histograma), ecualización (función de ecualización) y umbralización (umbral a aplicar).
  - En lugar de aplicarlos globalmente, calcular los **parámetros para cada punto**, usando una vecindad local.
  - Aplicar la transformación a cada punto, usando sus parámetros **específicos**.

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

32

3.3. Filtros no lineales.

- **Algoritmo. Ecualización local de tamaño axb:**
  1. Para cada punto (x,y) de la imagen A, calcular el histograma de una región rectangular desde (x-a, y-b) hasta (x+a, y+b) → H(v)
  2. Calcular el percentil del valor A(x,y), es decir: p:= (H(0)+H(1)+...H(A(x,y)))/((2a+1)(2b+1))
  3. Hacer R(x,y):= 255·p



UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

33

3.3. Filtros no lineales.

- **Ejemplo.** Ecualización local del histograma.

Imagen de entrada

Resolución: 299x202

Tamaño: 25x25

Tamaño: 50x50

Tamaño: 120x120

- La misma idea se podría aplicar a umbralización y estiramiento.

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

34

3.4. Morfología matemática.

- Los **operadores de morfología matemática** son un conjunto de filtros locales sencillos, que se pueden combinar para obtener resultados más complejos.
- Originalmente, están definidos sobre **imágenes binarias**.
- La idea es muy parecida a una convolución, pero utilizando las **operaciones booleanas** AND y OR.
- **Ejemplo.** R(x,y):= A(x-1,y-1) AND A(x,y) AND A(x+1,y+1)

Elemento estructurante
(= máscara de convolución)

(x-1,y-1)

1	0	0
0	$\boxed{1}$	0
0	0	1

(x,y) → Punto de ancla

(x+1,y+1)

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

35

3.4. Morfología matemática.

- El **elemento estructurante** define los píxeles que se usan en la operación y los que no.
- Dado un elemento estructurante, **E**, de cierta forma y tamaño, y una imagen binaria **B**, se definen dos **operaciones**:
  - **Dilatación B⊕E.** Combinar con OR los valores correspondientes a los píxeles 1 del elemento estructurante.
  - **Erosión B⊗E.** Combinar con AND los valores correspondientes a los píxeles 1 del elemento estructurante.
- La idea se puede generalizar a **imágenes no binarias**:
  - **Dilatación.** Combinar con Máximo.
  - **Erosión.** Combinar con Mínimo.

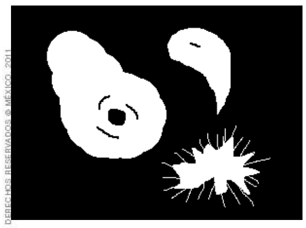
UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

36

3.4. Morfología matemática.

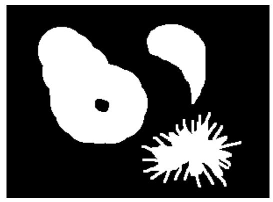
- El efecto de la **dilatación** es **extender o ampliar** las regiones de la imagen con valor 1 (color blanco), mientras que la **erosión** las **reduce**.
- La cantidad depende del **tamaño** y **forma** del elemento estructurante y del **número de veces** que se aplican.
- **Ejemplo.**

Imagen de entrada

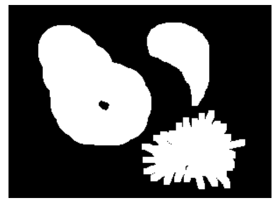


Elemento estru

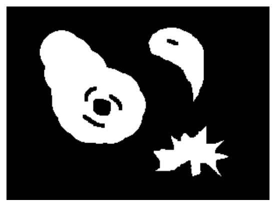
1	1	1
1	1	1
1	1	1



Dilatación 1



Dilatación 3



Erosión 1

Erosión 3

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

37

3.4. Morfología matemática.

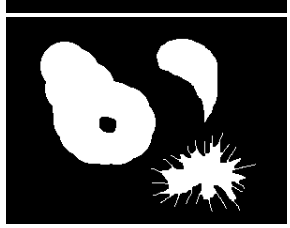
- Existen otras dos **operaciones frecuentes** basadas en erosión y dilatación:
  – **Abrir.** Aplicar erosión y después dilatación: **(B⊗E)⊕E**
  – **Cerrar.** Aplicar dilatación y después erosión: **(B⊕E)⊗E**

Imagen de entrada

Elemento estructurante

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Abrir: desaparecen los puntos sueltos o estructuras finas



Cerrar: se rellenan los huecos negros de cierto tamaño

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

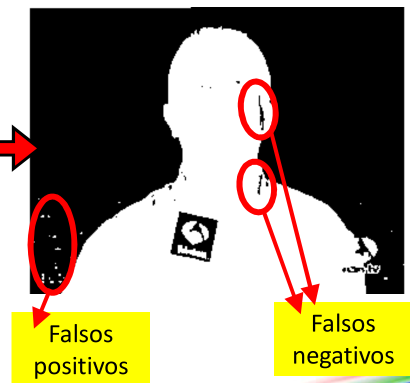
38

3.4. Morfología matemática.

- **Ejemplo. Segmentación de objetos.**
  Para segmentar un objeto del fondo usamos una simple umbralización. Funciona más o menos bien, pero aparecen algunos puntos mal clasificados.

Imagen de entrada

Umbralizada (u=130)

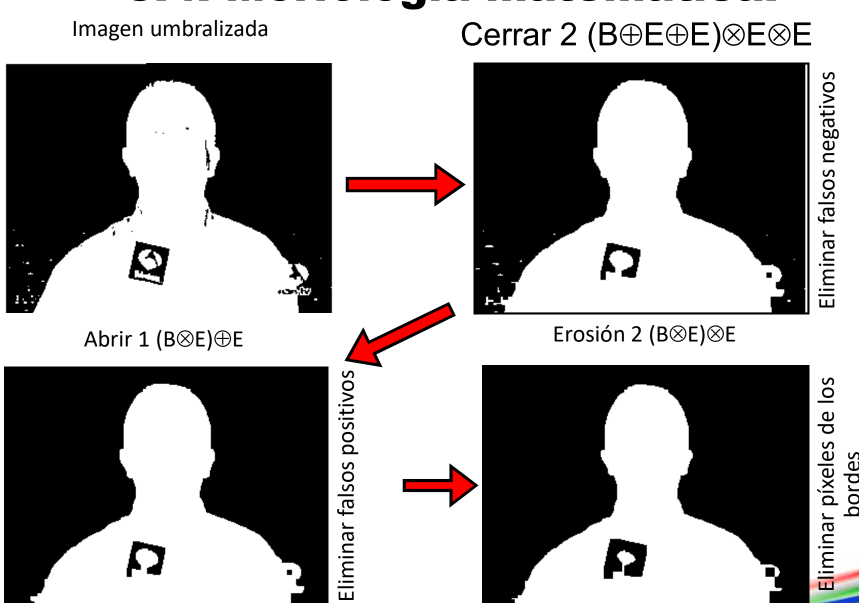


- Usar morfología para arreglar los falsos.

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

39

3.4. Morfología matemática.



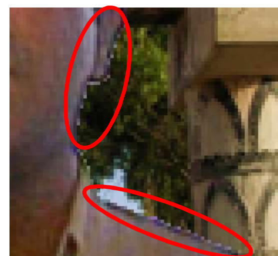
UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

40

3.4. Morfología matemática.

- El resultado es la **máscara** para segmentar el objeto.

- ¿Para qué se hacen las dos últimas erosiones?



UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

41

3.4. Morfología matemática.

- En **imágenes no binarias**, el resultado de dilatación y erosión es parecido a las operaciones de máximo y mínimo.
- De hecho, es igual si el elemento estructurante es todo 1.

Imagen entrada

Erosión, 1

Dilatación, 3

Cierre, 2

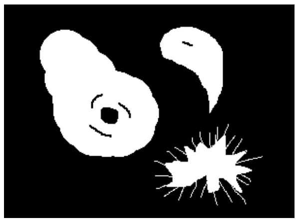
UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

42

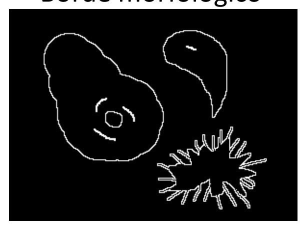
3.4. Morfología matemática.

- Existen otras operaciones de morfología, basadas en las elementales, que son útiles en análisis de imágenes.
- **Ejemplo 1. Borde morfológico: (B⊕E) - B**

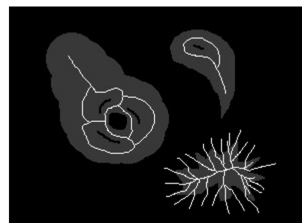
Imagen de entrada



Borde morfológico



- **Ejemplo 2. Adelgazamiento (*thinning*).** Aplicar una erosión, pero no eliminar el punto (no poner a 0) si se separa una región conexa en varias o si sólo queda un punto.



UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

43

3. Filtros y transformaciones locales.

Conclusiones:

- Las operaciones de **procesamiento local** son **esenciales** en mejora de imágenes, restauración, análisis, etc.
- Dos **categorías** básicas:
  - **Filtros lineales o convoluciones:** la salida es una combinación lineal de los píxeles en una vecindad → **Suavizado**, **bordes**, **perfilado**, etc.
  - **Filtros no lineales:** se usan funciones no lineales → **Máximo**, **mínimo**, operaciones de **morfología**, etc.
- Es posible **combinarlas** con operaciones de procesamiento global.
- La idea de "localidad" se puede extender a vídeo y a sonido, considerando la **dimensión temporal**.

UNAM • TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © MÉXICO, 2011

44