TEMA VII. Aplicaciones del análisis de Fourier en los sistemas discretos.

7.1 Respuesta de sistemas lineales e invariantes con el tiempo a exponenciales complejas

$$x(n) = e^{j\Omega_0 n} \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = ?$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, x(n-k) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{j\Omega_0 (n-k)} =$$

$$= e^{j\Omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\Omega_0 k} =$$

$$= \underbrace{H(\Omega_0)}_{\text{Valor propio}}\ \underbrace{e^{j\Omega_0 n}}_{\text{Función propia}}$$

Donde $H(\Omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\Omega_0 n}$

$$H(\Omega_0) = \underbrace{H(\Omega)}_{\substack{\text{Transf. de Fourier de } h(n)\text{, también} \\ \text{conocida como Resp. en frecuencia del sistema.}}} \Big|_{\Omega=\Omega_0}$$

Caso general, $x(n) = \sum_k a_k e^{jk\Omega_0 n}$

Por superposición,

$$y(n) = \sum_k a_k H(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}$$

Nota: $x(n)$ no es necesariamente periódica, y si este fuera el caso, $y(n)$ tampoco sería periódica.

Ejemplo

$$h(n) = \alpha^n u(n), \quad -1 < \alpha < 1$$

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \ \therefore\ x(n) \text{ periódica}:$$

$$x(n) = \frac{1}{2} e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi/N)n}$$

Transf. de Fourier de $h(n)$:

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}},$$

Por tanto, $H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi k/N}}$

y la salida:

$$y(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{jk(2\pi/N)n} =$$

$$= \frac{1}{2} H\left(\frac{2\pi}{N}\right) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} H\left(-\frac{2\pi}{N}\right) e^{-j(2\pi/N)n} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi/N}}\right) e^{j(2\pi/N)n} + \left(\frac{1}{1-\alpha e^{j2\pi/N}}\right) e^{-j(2\pi/N)n}\right]$$

Si sustituimos $\frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi/N}} = r e^{j\theta}$

entonces

$$y(n) = r\cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right)$$

Si $N=4$, por ejemplo, tenemos

$$\frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi/4}} = \frac{1}{1+j\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} e^{-j\tan^{-1}(\alpha)}$$

por tanto, $y(n) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \tan^{-1}(\alpha)\right)$

7.2 La propiedad de convolución.

$$\boxed{y(n) = x(n) * h(n) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)}$$

Ejemplo $h(n) = \delta(n-n_0)$

Su resp. en frecuencia:

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n_0) e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n_0}$$

Para cualquier entrada $x(n)$:

$$Y(\Omega) = e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

$$y(n) = x(n-n_0) \quad \text{(Prop. de desplazamiento)}$$

Ejemplo $h(n) = \alpha^n u(n)$

$x(n) = \beta^n u(n)$

Sus. transf. de Fourier:

$$H(\Omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-\beta e^{-j\Omega}}$$

Entonces:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})(1-\beta e^{-j\Omega})}$$

Mediante fracciones parciales, si $\alpha \neq \beta$

$$Y(\Omega) = \frac{A}{1-\alpha e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1-\beta e^{-j\Omega}}$$

$$A = (1-\alpha e^{-j\Omega})\, Y(\Omega)\Big|_{e^{j\Omega}=\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}$$

$$B = (1-\beta e^{-j\Omega})\, Y(\Omega)\Big|_{e^{j\Omega}=\beta} = -\frac{\beta}{\alpha-\beta}$$

Por lo tanto,

$$y(n) = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n u(n) - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^n u(n) =$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{n+1}u(n) - \beta^{n+1}u(n)\right]$$

En caso de $\alpha = \beta$,

$$Y(\Omega) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)^2 =$$

$$= \frac{j}{\alpha} e^{j\Omega} \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)$$

Por la prop. de diferenciación:

$$\alpha^n u(n) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

$$n\alpha^n u(n) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)$$

Por la prop. de desplazamiento

$$(n+1)\alpha^{n+1} u(n+1) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j e^{j\Omega} \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)$$

Dividiendo entre α:

$$y(n) = (n+1)\alpha^n u(n+1) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{j}{\alpha} e^{j\Omega} \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)^2$$

Para $n=-1$ $y(-1)=0$, por tanto,

$$y(n) = (n+1)\alpha^n u(n).$$

7.3 Convolución con la DFT.

7.3.1 Convolución circular o periódica

La propiedad de la secc. 7.2 no se puede usar para secuencias periódicas pues la sumatoria de convolución no convergería. En este caso:

Supongamos $x_p(n)$ y $h_p(n)$ son periódicas con período N con DFT's:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)nk}$$

$$H_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h_p(n) e^{-j(2\pi/N)nk}$$

La convolución circular $y_p(n)$ se denota:

$$y_p(n) = x_p(n) \circledast h_p(n)$$ y se define como

$$y_p(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) h_p(n-l)$$

Obteniendo su DFT:

$$Y_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) h_p(n-l)\right] e^{-j(2\pi/N)nk} =$$

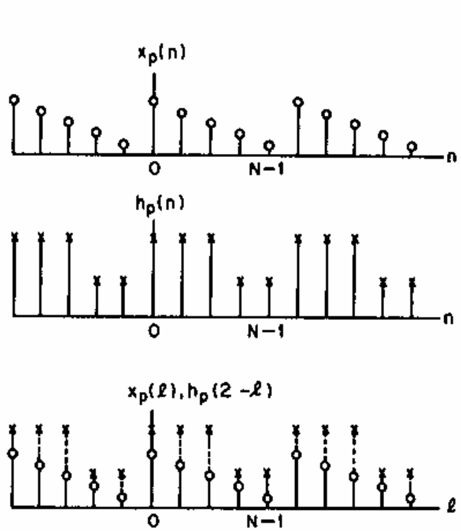
$$= \sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{N-1} h_p(n-l) e^{-j(2\pi/N)(n-l)k}\right]}_{H_p(k)} e^{-j(2\pi/N)lk} =$$

$$= H_p(k) \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} x_p(l)\, e^{-j(2\pi/N)lk}}_{X_p(k)} = H_p(k) X_p(k)$$

Resumiendo:

$$\boxed{y_p(n) = x_p(n) \circledast h_p(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y_p(k) = X_p(k)\, H_p(k)}$$

Ejemplo:



7.3.2. Convolución lineal o aperiódica usando la DFT

Para efectuar convolución lineal con secuencias de duración finita, se puede usar la convolución circular con algunas modificaciones:

Supongamos $x(n)$ y $h(n)$ secuencias finitas:

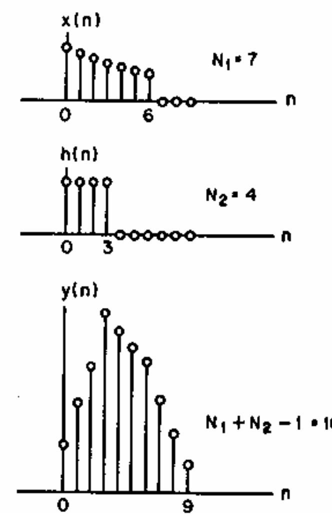
$x(n) \neq 0$ para $0 \leq n \leq N_1 - 1$

$h(n) \neq 0$ para $0 \leq n \leq N_2 - 1$

La convolución lineal $y(n) = h(n) * x(n)$:

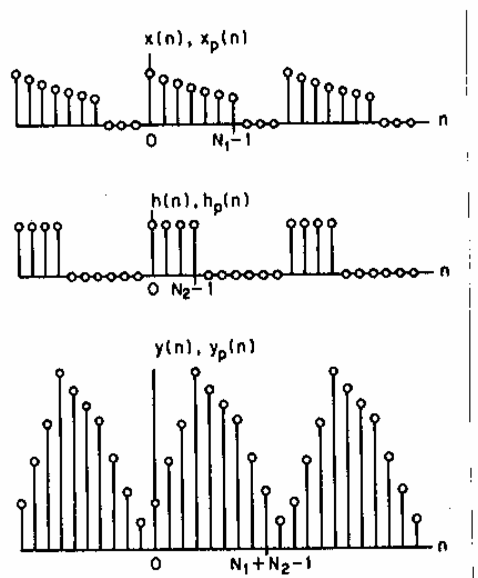
$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)\, x(n-m)$$

Ejemplo:



Observamos que $y(n)$ es una secuencia de N_1+N_2-1 muestras. Por tanto, para obtener $y(n)$ a partir de la convolución circular, agregamos a las secuencias $x(n)$ y $h(n)$ un número de muestras con valor nulo hasta convertirlas en secuencias de N_1+N_2-1 elementos. Entonces, obtenemos sus DFT's, las multiplicamos y obtenemos la IDFT del resultado.

Ejemplo:



En realidad, las DFT's no tienen que ser de longitud exactamente igual a N_1+N_2-1, sino que cualquier longitud $L \geq N_1+N_2-1$ se puede usar.

7.4 La propiedad de modulación.

$$y(n) = x_1(n)\, x_2(n)$$

Su transf. de Fourier:

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-j\Omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\, x_2(n)\, e^{-j\Omega n}.$$

Sustituyendo $x_1(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\theta) e^{j\theta n} d\theta$

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\theta)\, e^{j\theta n} d\theta \right\} e^{-j\Omega n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\theta) \underbrace{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) e^{-j(\Omega-\theta)n}\right]}_{X_2(\Omega-\theta)} d\theta$$

Por tanto,

$$\boxed{y(n) = x_1(n)\, x_2(n) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\theta) X_2(\Omega-\theta)\, d\theta}$$

7.5 Respuesta de sistemas caracterizados por ecuaciones en diferencias.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

Para obtener la Resp. en frecuencia $H(\Omega)$:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k)\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}\, Y(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}\, X(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}$$

Ejemplo:

$$y(n) - a\,y(n-1) = x(n) \qquad |a|<1$$

$$\therefore\ H(\Omega) = \frac{1}{1-a e^{-j\Omega}}$$

de donde

$$h(n) = a^n u(n)$$

Ejemplo

$$y(n) - \frac{3}{4} y(n-1) + \frac{1}{8} y(n-2) = 2\,x(n)$$

De donde

$$H(\Omega) = \frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}$$

Por fracciones parciales:

$$H(\Omega) = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)} =$$

$$= \frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

De donde:

$$h(n) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Supongamos ahora que en este sistema,

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Entonces

$$Y(\Omega) = H(\Omega) X(\Omega) =$$

$$= \left[\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)}\right]\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2}$$

Exponsión en fracciones parciales:

$$Y(\Omega) = \frac{A_1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}} + \frac{A_2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

Fórmula:

$$A_k = \frac{1}{(\sigma-k)!}(-p)^{\sigma-k}\left[\frac{d^{\sigma-k}}{d(e^{-j\Omega})^{\sigma-k}}\left[(1-p^{-1}e^{-j\Omega})^{\sigma}Y(\Omega)\right]\right]\Bigg|_{e^{-j\Omega}=p}$$

De donde:

$$A_1 = (-4)\left[\frac{d}{d(e^{-j\Omega})}(1-\tfrac{1}{4}e^{-j\Omega})^2 Y(\Omega)\right]\Bigg|_{e^{-j\Omega}=4} = -4$$

$$A_2 = (1-\tfrac{1}{4}e^{-j\Omega})^2 Y(\Omega)\Big|_{e^{-j\Omega}=4} = -2$$

$$B = (1-\tfrac{1}{2}e^{-j\Omega})\, Y(\Omega)\Big|_{e^{-j\Omega}=2} = 8$$

Por tanto, $Y(\Omega) = -\frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}} - \frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2} + \frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$

de donde

$$y(n) = \left[-4(\tfrac{1}{4})^n - 2(n+1)(\tfrac{1}{4})^n + 8(\tfrac{1}{2})^n\right]u(n)$$

7.6 Diagramas de respuesta en frecuencia

$$H(\Omega) = |H(\Omega)|\, e^{j\theta(\Omega)}$$

Dado que

$$Y(\Omega) = H(\Omega)\,X(\Omega), \quad \text{entonces}$$

$$|Y(\Omega)| = |H(\Omega)|\,|X(\Omega)|$$

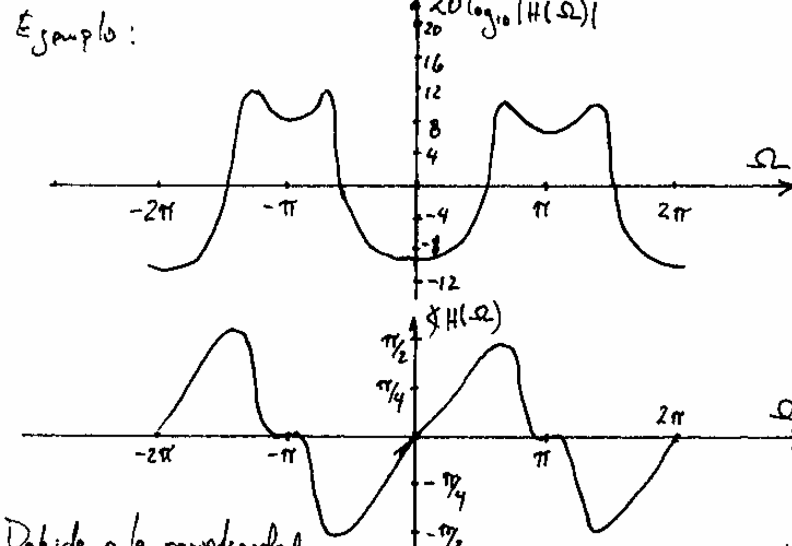
$$\sphericalangle Y(\Omega) = \sphericalangle H(\Omega) + \sphericalangle X(\Omega)$$

$|H(\Omega)|$ = ganancia del sistema.

Es más útil graficar $\log|H(\Omega)|$, ya que

$$\log|Y(\Omega)| = \log|H(\Omega)| + \log|X(\Omega)|$$

Ejemplo:



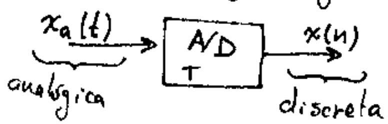
Debido a la periodicidad de $H(\Omega)$, solo es necesario considerar $|\Omega| \le \pi$

Si $h(n)$ es real, entonces solo es necesario considerar $0 \le \Omega \le \pi$ pues $|H(\Omega)| = |H(-\Omega)|$ y $\sphericalangle H(\Omega) = -\sphericalangle H(-\Omega)$

7.7 Conversión analógica-digital y digital-analógica

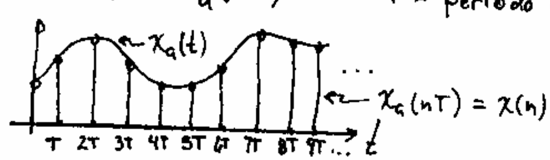
- La mayoría de las señales son generadas analógicamente.
- Complejos algoritmos de procesamiento de la señal sólo se pueden implementar eficientemente y con precisión en computadora digital.

7.7.1 Conversión analógica-digital (A/D) ideal.



Relación en el dominio temporal:

$$x(n) = x_a(nT) \qquad T = \text{período de muestreo}$$



En el dominio de la frecuencia:

Para $x_a(t)$:

$$X_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad (1)$$

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \quad (2)$$

Para $x(n)$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jn\Omega} \quad (3)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\, e^{jn\Omega}\, d\Omega \quad (4)$$

De (2)

$$x_a(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega)\, e^{j\omega nT}\, d\omega$$

Sustituyendo la integral por una sumatoria infinita de integrales abarcando cada una $\frac{2\pi}{T}$ rad/seg.:

$$x_a(nT) = \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{(2r-1)\frac{\pi}{T}}^{(2r+1)\frac{\pi}{T}} X_a(\omega)\, e^{j\omega nT}\, d\omega$$

Cambiando la variable ω por $\omega' + \frac{2\pi r}{T}$:

$$x_a(nT) = \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_a\left(\omega' + \frac{2\pi r}{T}\right) e^{j\omega' nT}\, \cancel{e^{j2\pi r n}}^{\,1}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\omega + \frac{2\pi r}{T}\right)\right] e^{j\omega nT}\, d\omega .$$

sustituyendo $\omega = \frac{\Omega}{T}$

$$x_a(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T} + \frac{2\pi r}{T}\right)\right] e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

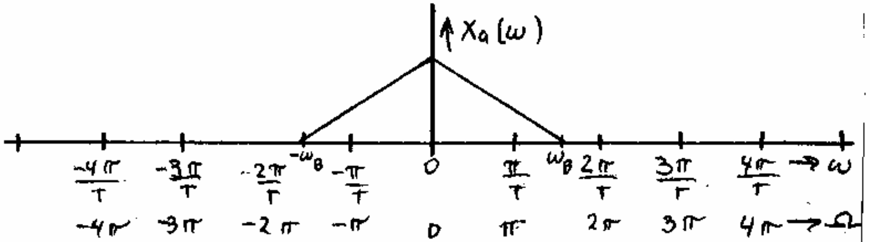
Recordando que $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\, e^{jn\Omega}\, d\Omega \quad (4)$

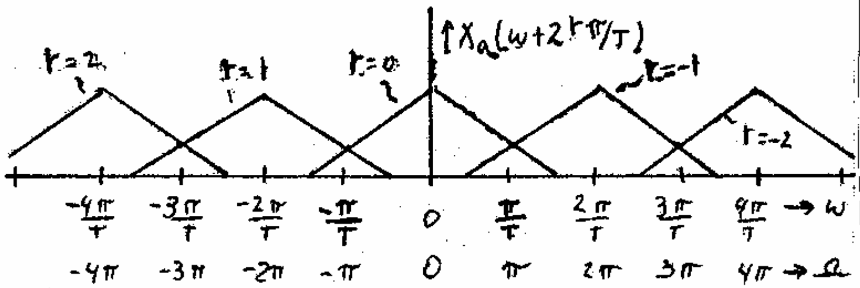
y que $x(n) = x_a(nT)$ concluimos:

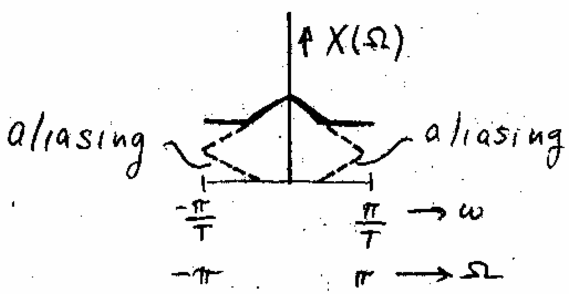
$$\boxed{X(\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T} + \frac{2\pi r}{T}\right)}$$

o bien,

$$\boxed{X(\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\omega + \frac{2\pi r}{T}\right)}$$







Para evitar "aliasing", $x_a(t)$ debe ser de banda limitada:

$X_a(\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \frac{\pi}{T}$, es decir,

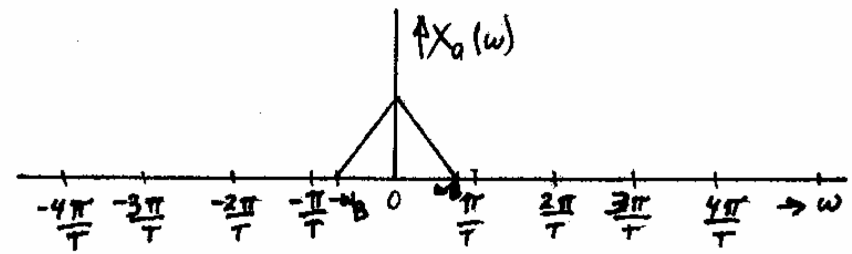
si $X_a(\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \omega_B$, entonces la frecuencia de muestreo $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ debe cumplir con:

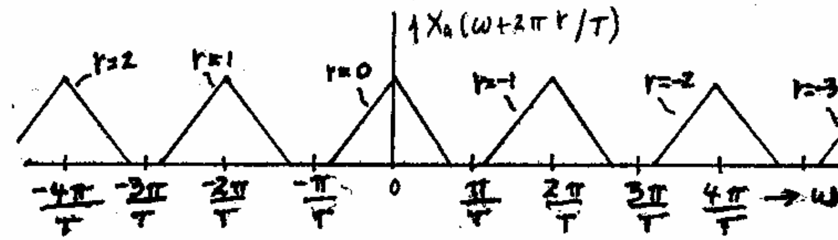
$$\boxed{\omega_s \geq 2\,\omega_B}$$ Teorema del Muestreo

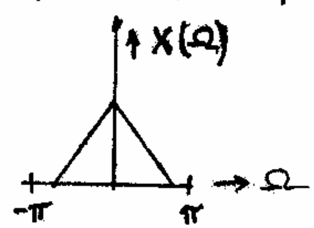
Frec. de Nyquist

Taza de Nyquist

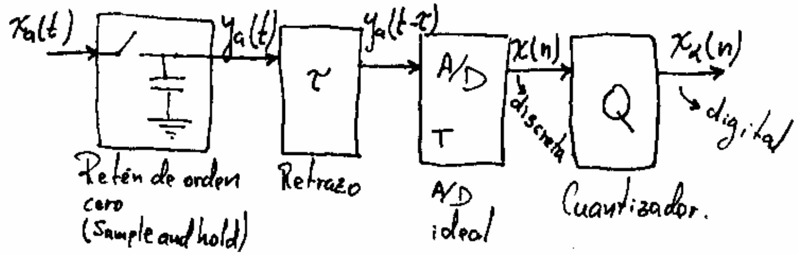
Si el teorema de Nyquist se cumple, entonces la señal $x_a(t)$ se puede recuperar de sus muestras $x(n)$ y se cumple que $X(\Omega) = \frac{1}{T} X_a(\omega)$, para $-\frac{\pi}{T} < \omega < \frac{\pi}{T}$

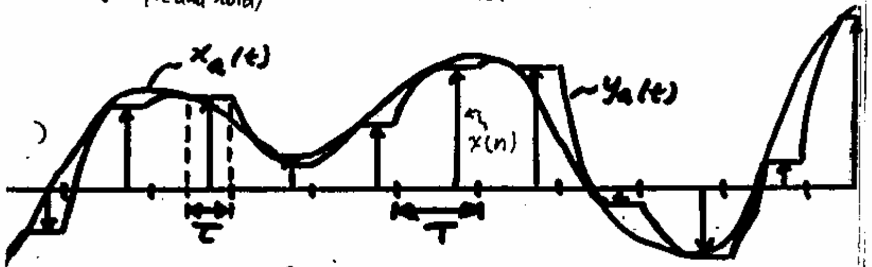


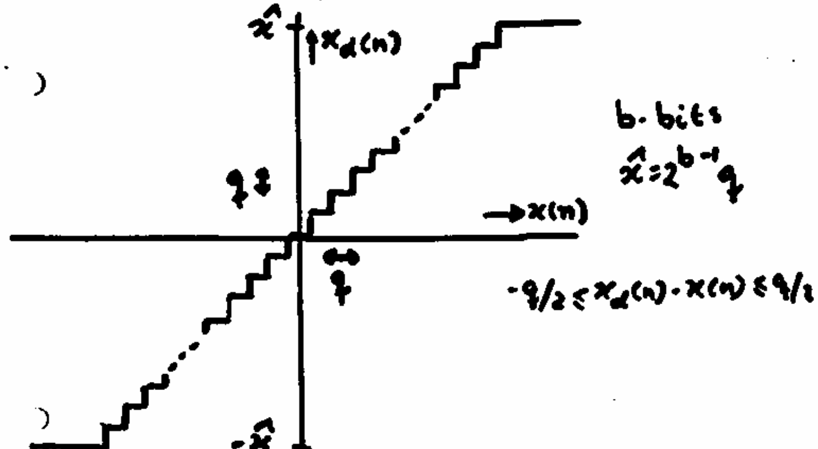


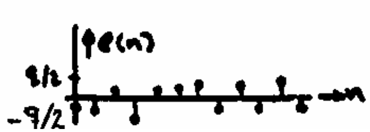


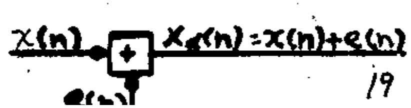
7.7.2 Conversión analógica-digital práctica



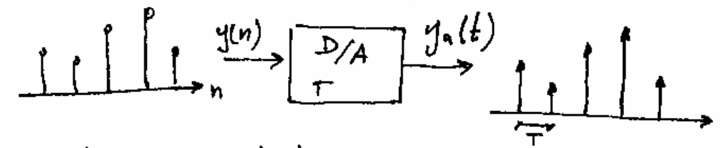








7.7.3 Conversión digital-analógica (D/A) ideal.



En el dominio del tiempo:

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\delta_a(t-nT)$$

En el dominio de la frecuencia

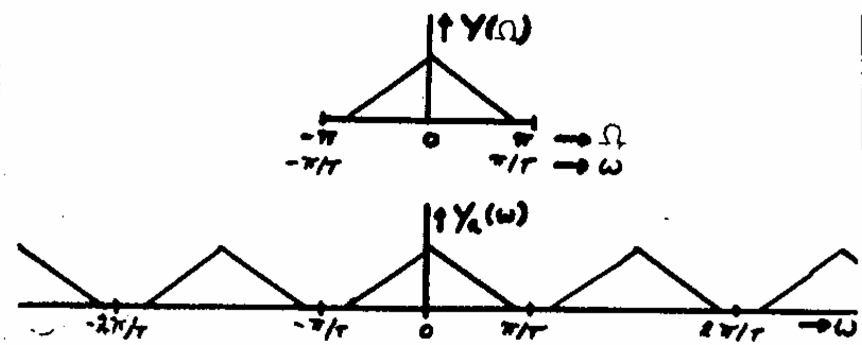
$$Y_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\delta_a(t-nT)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t-nT)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

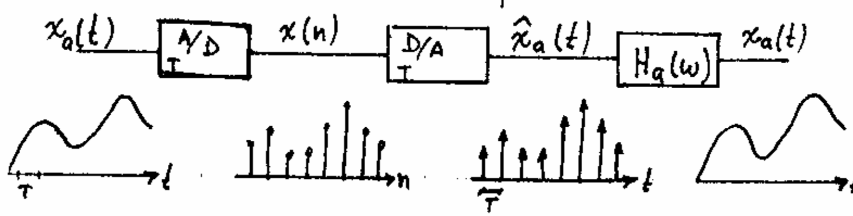
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\, e^{-jn\omega T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\, e^{-jn\Omega} = Y(\Omega)$$

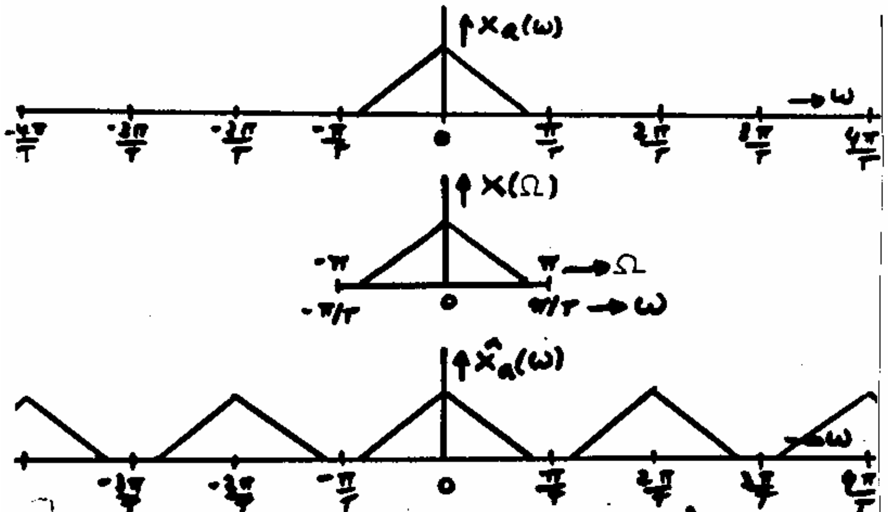
Por lo tanto:

$$Y_a(\omega) = Y(\Omega) = Y(\omega T)$$

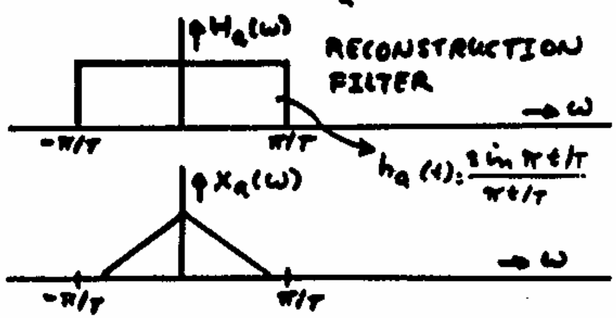


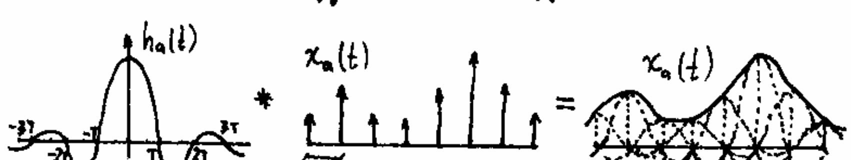
7.7.4 Proceso de conversión A/D y D/A ideal



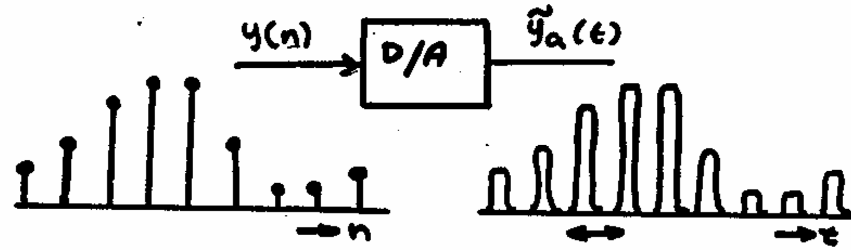


RECONSTRUCTION OF $X_a(\omega)$?

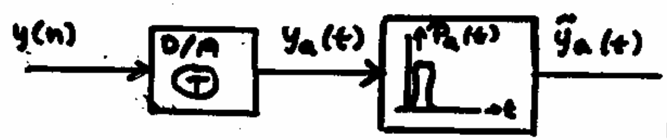




7.7.5. Conversión digital-analógica práctica

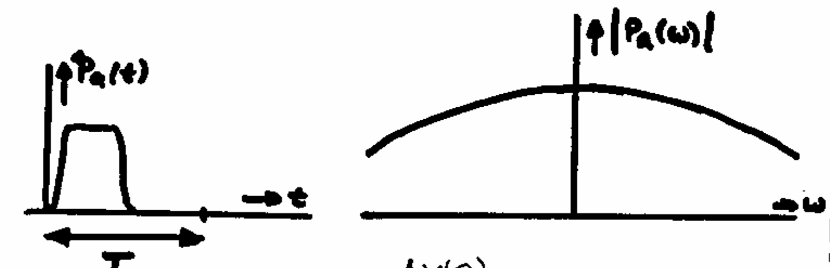


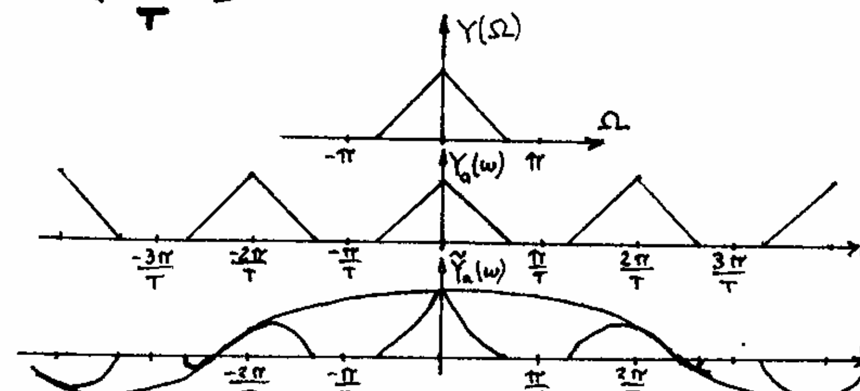
$$\tilde{y}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\, p_a(t-nT)$$



De donde:

$$\tilde{Y}_a(\omega) = Y_a(\omega)\, P_a(\omega)$$





7.7.6 Proceso de conversión A/D y D/A práctico