# TEMA VI Análisis de Fourier en el Tiempo discreto

## 6.1 Representación de señales periódicas: La serie de Fourier en tiempo discreto

### 6.1.1 Combinaciones lineales de exponenciales complejas discretas relacionadas armónicamente

$$e^{j(2\pi/N)n} = e^{j(2\pi/N)(n+N)}$$

Periodo $= N$

El conjunto de señales exponenciales complejas con periodo $N$:

$$\underset{\text{distintas}}{N \text{ señales}} \left\{ \phi_k(n) = e^{jk(2\pi/N)n} \right. \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\hookrightarrow e^{j(\Omega + 2\pi r)n} = e^{j\Omega n} e^{j2\pi r n} = e^{j\Omega n}$$

Por tanto, $\phi_0(n) = \phi_N(n)$, $\phi_1(n) = \phi_{N+1}(n)$

$$\phi_k(n) = \phi_{k+rN}(n)$$

$$\Rightarrow \underbrace{x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \phi_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n}}_{\text{Serie de Fourier en Tiempo Discreto}}$$



### 6.1.2. Determinación de la Serie de Fourier

Multiplicando la ec. de la Serie por $e^{-jr(2\pi/N)n}$ y sumando los $N$ términos

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$$

Pero
$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & \text{si } k=r \\ 0 & \text{si } k \neq r \end{cases}$$

Es decir, $\phi_k(n)$ es un conjunto de funciones ortogonales

Por lo tanto,
$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jr(2\pi/N)n} = N a_r$$

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jr(2\pi/N)n}$$

Resumen

$$\boxed{\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \\ a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n} \end{aligned}}$$

Serie de Fourier en tiempo discreto :

- $a_k \rightarrow$ coeficientes espectrales de $x(n)$
- Serie finita de $N$ términos
- Intervalo de k de $0$ a $N-1$, o cualquier conjunto de $N$ enteros consecutivos

Por ejemplo

$$x(n) = a_0\,\phi_0(n) + a_1\,\phi_1(n) + \cdots + a_{N-1}\,\phi_{N-1}(n) =$$
$$= a_1\,\phi_1(n) + a_2\,\phi_2(n) + \cdots + a_N\,\phi_N(n)$$

ya que $\phi_0(n) = \phi_N(n)$ y

$$a_0 = a_N$$

En gnal

$$\phi_k(n) = \phi_{k+N}(n)$$

y

$$a_k = a_{k+N}$$



Ejemplo $\quad x(n) = \operatorname{sen}(\Omega_0 n)$

Si $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ es No. irracional, entonces $x(n)$ no es periódica, por lo tanto, la Serie de Fourier no existe.

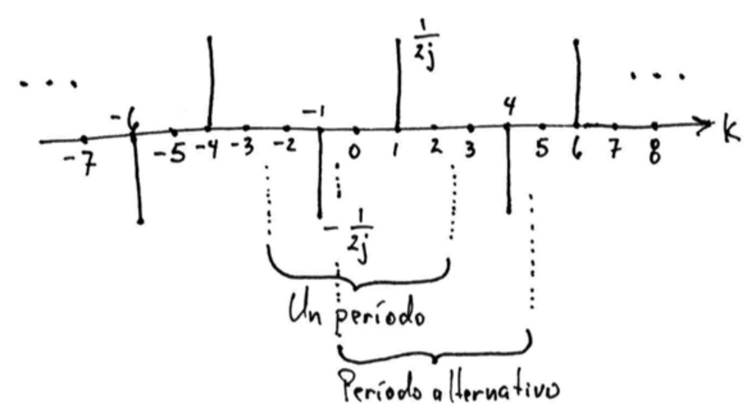
Si $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ es No. racional, entonces $x(n)$ es periódica.

Supongamos que $\frac{2\pi}{\Omega_0} = N$, entonces $x(n)$ es periódica con período $N$ y :

$$x(n) = \frac{1}{2j}\, e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j}\, e^{-j(2\pi/N)n}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2j} \qquad a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

Si $N = 5$



Supongamos que $\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{N}{m} \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$

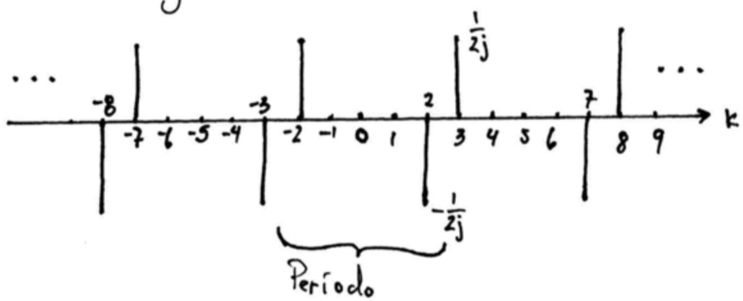
donde $m$ y $N$ no tienen factores comunes. Período $= N$.

Entonces,

$$x(n) = \frac{1}{2j} e^{jm(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-jm(2\pi/N)n}$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{2j} \qquad a_{-m} = -\frac{1}{2j}$$

Si $m = 3$ y $N = 5$




---

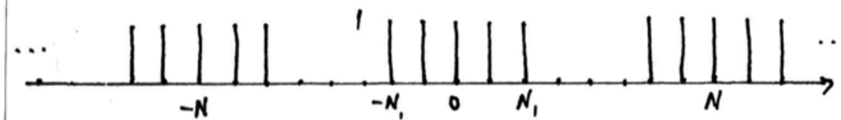
Si $x(n)$ es real, entonces:

$$a_{-k} = a_k^*$$

Por tanto, existe también la Serie Trigonométrica de Fourier en Tiempo Discreto.



Ejemplo




$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n}$$

sustituyendo $m = n + N_1$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} =$$

$$= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m}$$

---

Fórmula $\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$

---

$$a_k = \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \left[ \frac{1 - e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right] =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/2N)} \left[ e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N} \right]}{e^{-jk(2\pi/2N)} \left[ e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)} \right]} =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\operatorname{sen}[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\operatorname{Sen}(2\pi k/2N)} \quad \text{para } k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

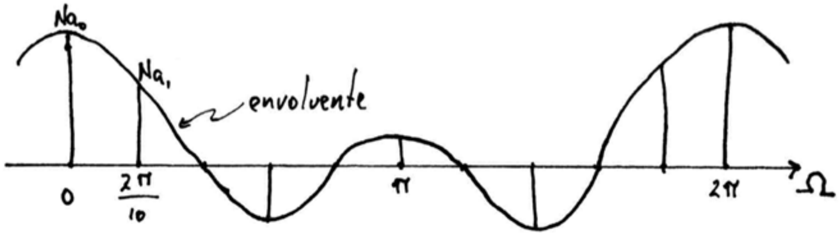
y

$$a_k = \frac{2N_1+1}{N} \quad \text{para } k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

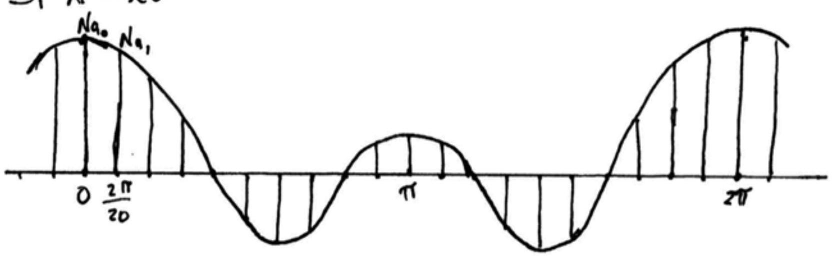
O bien, $$Na_k = \underbrace{\frac{\text{sen}[(2N_1+1)\Omega/2]}{\text{sen}(\Omega/2)}}_{\text{envolvente}}\Bigg|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}}$$

Supongamos $2N_1+1=5$

Si $N=10$

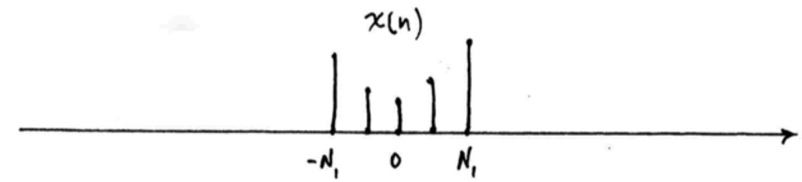


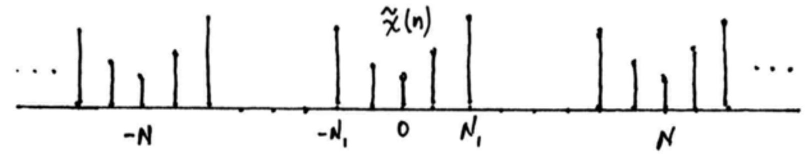

Si $N=20$






## 6.2 Representación de señales aperiódicas: La transformada de Fourier en el tiempo discreto




si $N \to \infty$, entonces $\tilde{x}(n) = x(n)$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \qquad (6.2.1)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}(n) e^{jk(2\pi/N)n} \qquad (6.2.2)$$

Como $x(n) = \tilde{x}(n)$ dentro del intervalo $|n| < N_1$ entonces

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n} \qquad (6.2.3)$$

Envolvente $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$ (6.2.4)

entonces $a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0)$ (6.2.5)

donde $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

Sustituyendo Ec. (6.2.5) en (6.2.1),

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \quad (6.2.6)$$

Como $\Omega_0 = 2\pi/N$, o bien, $\frac{1}{N} = \frac{\Omega_0}{2\pi}$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N\rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \, \Omega_0 \quad (6.2.7)$$

Si $N \to \infty$, entonces, $\tilde{x}(n) = x(n)$ y $\Omega_0 \to 0$

De (6.2.7), $\underbrace{k\Omega_0}_{\text{discreta}} \to \underbrace{\Omega}_{\text{variable continua}}$

$N$ intervalos de $\frac{2\pi}{N}$ $\to$ Integral en rango de $2\pi$

Por tanto,

$$\boxed{\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n}\, d\Omega \quad \to \text{síntesis} \\ X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \quad \to \text{análisis} \end{aligned}}$$

espectro de $x(n)$



Para la existencia de la transformada de Fourier,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \qquad \text{abs. sumable}$$

o bien,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \qquad \text{energía finita.}$$

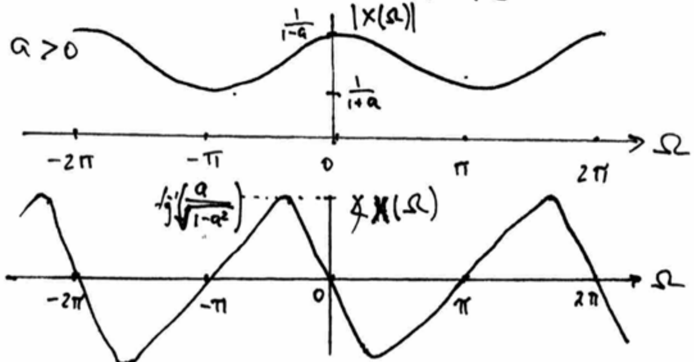
---

Ejemplo $x(n) = a^n u(n)$ $\quad |a| < 1$

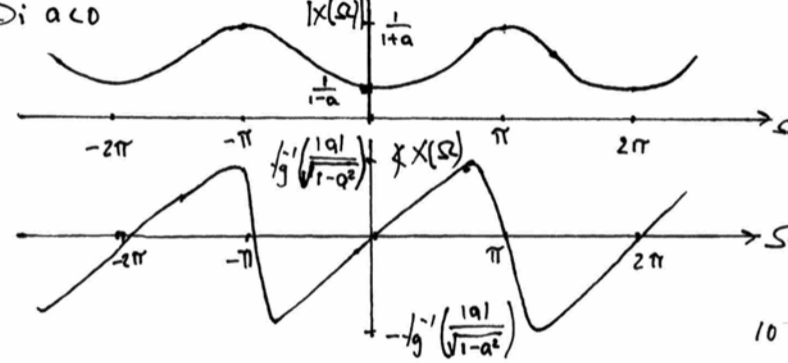
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-j\Omega n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}}$$

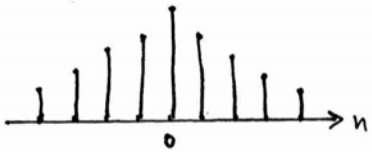
Si $a > 0$




Si $a < 0$



Ejemplo $x(n) = a^{|n|}$ $\quad |a|<1$



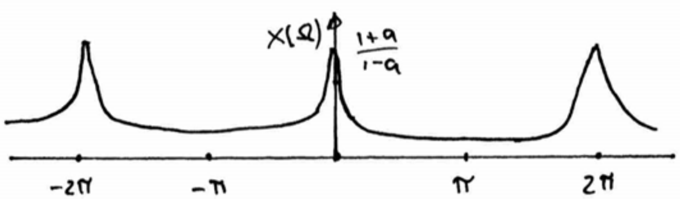

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{-j\Omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\Omega n}$$

sustituyendo $m=-n$ en la segunda $\Sigma$

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\Omega})^{n} + \sum_{m=1}^{\infty} (a e^{j\Omega})^{m} =$$

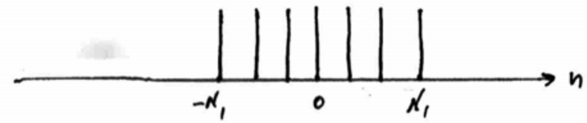
$$= \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} + \frac{1}{1-ae^{j\Omega}} - 1 =$$

$$= \frac{1-a^2}{1-2a\cos\Omega + a^2} \quad \rightarrow \text{Real.}$$






Ejemplo $x(n) = \begin{cases} 1 & |n| \le N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$




$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n}$$

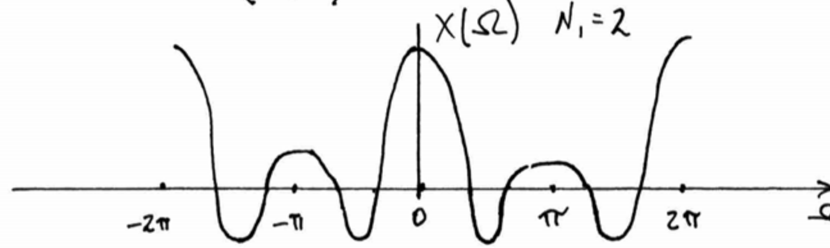
sustituyendo $m = n + N_1$

$$X(\Omega) = \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\Omega(m-N_1)} = e^{j\Omega N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\Omega m} =$$

$$= e^{j\Omega N_1} \frac{1-e^{-j\Omega(2N_1+1)}}{1-e^{-j\Omega}} =$$

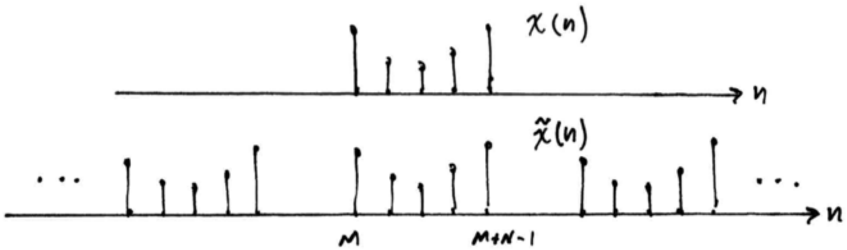
$$= \frac{e^{j\Omega N_1} e^{-j\Omega(N_1+\frac{1}{2})} \left[ e^{j\Omega(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-j\Omega(N_1+\frac{1}{2})} \right]}{e^{-j\Omega/2} \left[ e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2} \right]} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left[\Omega(N_1+\frac{1}{2})\right]}{\operatorname{sen}(\Omega/2)}$$



## 6.3 La transformada de Fourier en tiempo discreto para señales periódicas

### 6.3.1 Los coeficientes de la serie de Fourier como muestras de la transformada de Fourier de un período.




$$Na_k = X\left(k\frac{2\pi}{N}\right)$$

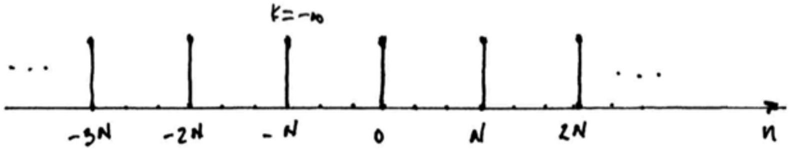
$a_k \rightarrow$ coefs. de F. de $\tilde{x}(n)$

$X(\Omega) \rightarrow$ T. de F. de $x(n)$

$\therefore$ Valores $Na_k$ = muestras de la T. de F. de un período.

Ejemplo.

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-kN)$$




Coefs de F. de $\tilde{x}(n)$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\, e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N}$$



Si $x_1(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{otros valores de } n \end{cases}$

Es decir, $x_1(n) = \delta(n)$

$$X_1(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\, e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n}\Big|_{n=0} = 1$$

Por tanto, se verifica que $Na_k = X_1\left(k\frac{2\pi}{N}\right)$

Si $x_2(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & 1 \le n \le N \\ 0 & \text{otros valores de } n \end{cases}$

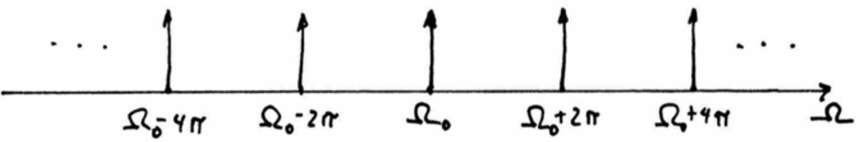
Es decir, $x_2(n) = \delta(n-N)$

$$X_2(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\, e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega N}$$

$X_1(\Omega) \neq X_2(\Omega)$ sin embargo, en las frecuencias de muestreo $\Omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, se cumple que $Na_k = X_2\left(k\frac{2\pi}{N}\right) = X_1\left(k\frac{2\pi}{N}\right)$

## 6.3.2 La transformada de Fourier para señales periódicas discretas.

Considere $X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l)$




$$x(n) = ?$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Si escogemos intervalo de integración que abarca al impulso en $\Omega = \Omega_0 + 2\pi r$, entonces

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n} =$$
$$= e^{j\Omega_0 n}$$



Supongamos ahora

$$x(n) = b_1 e^{j\Omega_1 n} + b_2 e^{j\Omega_2 n} + \cdots + b_M e^{j\Omega_M n}$$

entonces

$$X(\Omega) = b_1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_1 - 2\pi l) +$$
$$+ b_2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_2 - 2\pi l) +$$
$$+ \cdots + b_M \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_M - 2\pi l)$$

O sea, un tren de impulsos periódico, con impulsos en $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_M$ y en múltiplos de $2\pi$ de estas frecuencias

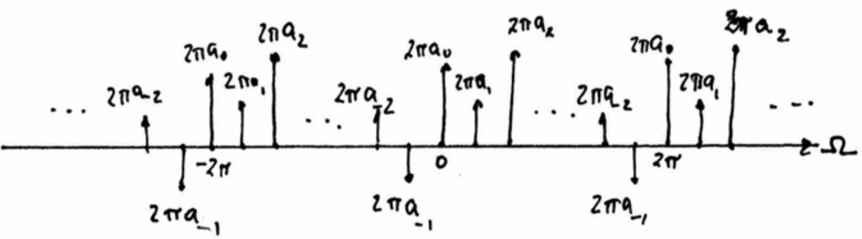
$x(n)$ no es necesariamente periódica. Periódica sólo si $\Omega_i = \frac{2\pi m_i}{N}$

Supongamos periodicidad, es decir

$$x(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} =$$

$$= a_0 + a_1 e^{j(2\pi/N)n} + a_2 e^{j2(2\pi/N)n} + \cdots + a_{N-1} e^{j(N-1)(2\pi/N)n}$$

$$\Rightarrow X(\Omega) = a_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - 2\pi l) + a_1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N} - 2\pi l\right) +$$
$$+ \cdots + a_{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta\left(\Omega - (N-1)\frac{2\pi}{N} - 2\pi l\right)$$



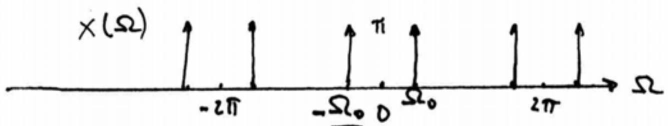

Debido a la periodicidad de $a_k$,

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, a_k\, \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

---

Ejemplo $\quad x(n) = \cos \Omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 n}$

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi \left[\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)\right]$$

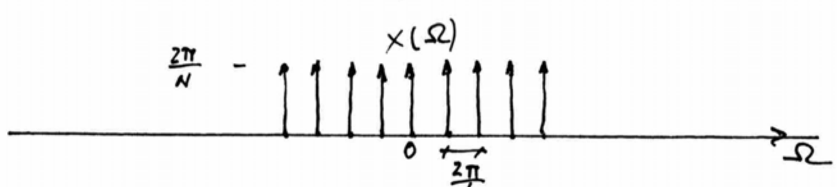



---

Ejemplo $\quad x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$

$$a_k = \frac{1}{N}$$

Entonces, $\quad X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$






## 6.4 Propiedades de la transformada de Fourier para tiempo discreto.

1) Periodicidad en $\Omega$, con periodo $= 2\pi$

2) Linealidad

$$\boxed{a x_1(n) + b x_2(n) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a X_1(\Omega) + b X_2(\Omega)}$$

3) Simetría.

Si $x(n)$ es real, entonces $\boxed{X(\Omega) = X^*(-\Omega)}$

Por lo tanto,

$\mathrm{Re}\{X(\Omega)\}$ es par

$\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}$ es impar

4) Desplazamiento en tiempo y frecuencia

Si $\quad x(n) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$

entonces

$$\boxed{\begin{aligned} x(n-n_0) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \\ e^{j\Omega_0 n} x(n) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega - \Omega_0) \end{aligned}}$$

5) Diferenciación y Sumatoria

Si $x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$

entonces $x(n)-x(n-1) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (1-e^{-j\Omega})X(\Omega)$

Considere $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$

Observando que $y(n)-y(n-1)=x(n)$

Entonces $$\boxed{\sum_{m=-\infty}^{n} x(m) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)+\underbrace{\pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)}_{\text{Valor de dc resultante de la sumatoria}}}$$

Ejemplo $x(n)=\delta(n) \Rightarrow X(\Omega)=1$

$$u(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m)$$

Entonces,

$$u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$$



6) Escalamiento en tiempo y frecuencia

Si $x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$

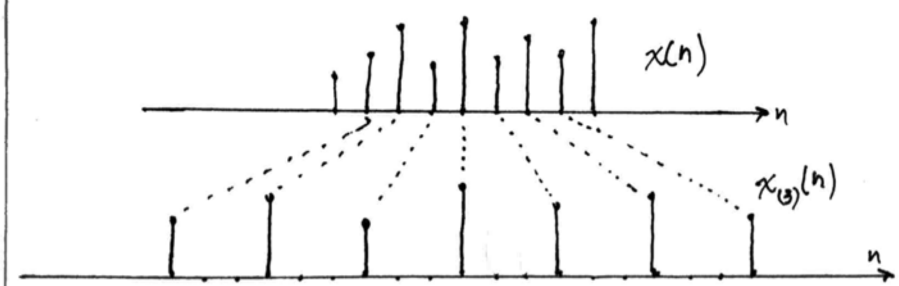
Considere
$$y(n)=x(-n)$$

$$Y(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-j\Omega n}=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{j\Omega m}=X(-\Omega)$$

Resumiendo $$\boxed{x(-n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-\Omega)}$$

Considere ahora $x_{(k)}(n)=\begin{cases} x(n/k) & \text{si } n \text{ multiplo de } k \\ 0 & \text{si } n \text{ no es multiplo de } k\end{cases}$

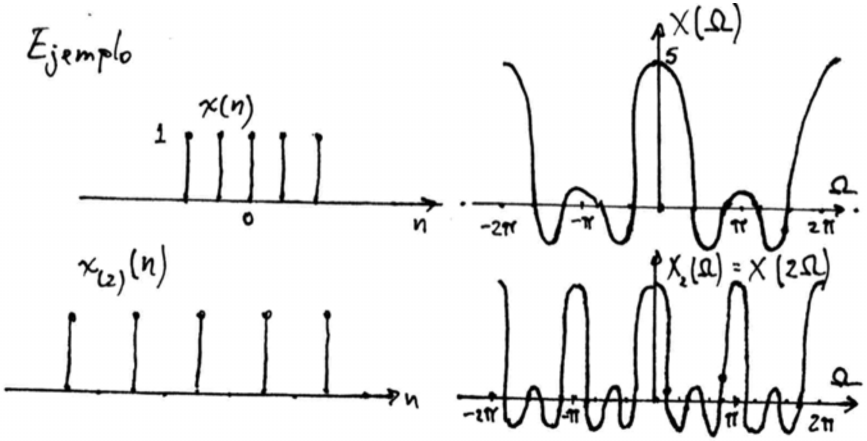



Entonces $X_{(k)}(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}(n)e^{-j\Omega n}=\sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{(k)}(rk)e^{-j\Omega rk}=$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)e^{-j(k\Omega)r}=X(k\Omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{(k)}(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(k\Omega)}$$

Ejemplo




7) Diferenciación en frecuencia

Sea $x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} j n x(n) e^{-j\Omega n}$$

$$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, x(n) e^{-j\Omega n}$$

Conclusión

$$\boxed{n\, x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\,\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}}$$



8) Relación de Parseval

Sea $x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$

Entonces

$$\boxed{\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2}_{\text{Energía de } x(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \underbrace{|X(\Omega)|^2}_{\text{Espectro de Densidad de Energía}} d\Omega}$$

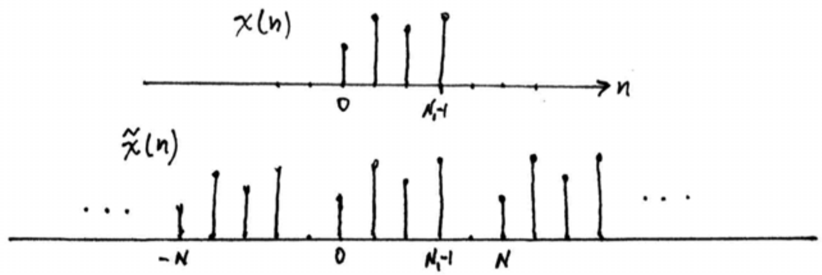
Para señales periódicas, la energía es infinita. Para estos casos

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x(n)|^2}_{\text{Potencia contenida en un periodo}} = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2}$$

Coefs. de la serie de Fourier.

## 6.5 Representación de señales de duración finita: La transformada discreta de Fourier (DFT).

- Calculada eficientemente en computadora digital (hardware)
- Algoritmos rápidos (FFT)




$$N \geq N_1$$

$$\tilde{x}(n) = x(n) \quad \text{para} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Serie de Fourier para $\tilde{x}(n)$:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}(n) e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Escogiendo $0 \leq n \leq N-1$, entonces

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n},$$



Multiplicando por $N$:

DFT

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1}$$

De la síntesis de la serie de Fourier

IDFT

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk(2\pi/N)n}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1}$$

- $X(k)$ es periódica con período $N$
- $x(n)$ puede interpretarse como periódica con período $N$

Relación entre la DFT y la transf. de Fourier para señales discretas:

$$x(n) = a^n \quad \text{para} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

La DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j(2\pi/N)nk} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left[a e^{-j(2\pi/N)k}\right]^n =$$

$$= \frac{1 - a^N}{1 - a e^{-j(2\pi/N)k}} \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

Ahora, la transf. de Fourier:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} =$$

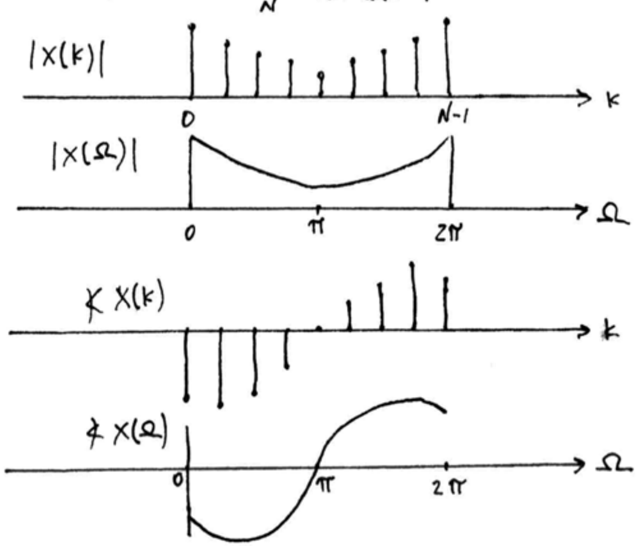
$$= \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} (a e^{-j\Omega})^n =$$

$$= \frac{1 - a^N e^{-j\Omega N}}{1 - a e^{-j\Omega}}$$

Comparando $X(k)$ y $X(\Omega)$ observamos que

$$X(k) = X(\Omega)\Big|_{\Omega = \frac{2\pi k}{N}}$$

Es decir, los coeficientes $X(k)$ son muestras de $X(\Omega)$ espaciadas $\frac{2\pi}{N}$ radianes.






## 6.6 La transformada rápida de Fourier (FFT)

- Algoritmos rapidos para calcular la DFT en computadora digital.

DFT: $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)nk}$ $\quad k = 0, 1, \ldots, N-1$ (6.6.1)

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk} \qquad (6.6.2)$$

en donde $W = e^{-j(2\pi/N)}$

$W^{nk}$ es periódica con período $N$:

$$W^{(n+mN)(k+lN)} = W^{nk}, \quad m, l = 0, \pm 1, \ldots$$

Usaremos $W_N$ en lugar de $W$

Supongamos $x(n)$ es una secuencia con $0 \leq n \leq N-1$ donde $N$ es una potencia de 2.

Entonces:

$$x_1(n) = x(2n), \quad n = 0, 1, \ldots, \tfrac{N}{2} - 1 \quad \text{(pares)}$$

$$x_2(n) = x(2n+1), \quad n = 0, 1, \ldots, \tfrac{N}{2} - 1 \quad \text{(impares)}$$

Entonces

$$X(k)=\sum_{\substack{n=0\\(n\ \text{par})}}^{N-1} x(n)\,W_N^{nk}+\sum_{\substack{n=0\\(n\ \text{impar})}}^{N-1} x(n)\,W_N^{nk} =$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)\,W_N^{2nk}+\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)\,W_N^{(2n+1)k}$$

Observamos que

$$W_N^2=\left[e^{j(2\pi/N)}\right]^2 = e^{j[2\pi/(N/2)]} = W_{N/2}$$

entonces

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n)\,W_{N/2}^{nk} + W_N^k\sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n)\,W_{N/2}^{nk} =$$

$$= X_1(k) + W_N^k\,X_2(k) \qquad (6.6.3)$$

donde $x_1(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k)$

$x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)$

Evaluación de $X(k)$ con (6.6.2) necesita

$(N-1)^2$ multiplicaciones y $N(N-1)$ sumas

$X(k)$ con (6.6.3) necesita

$N+\left(\frac{N}{2}\right)^2\cdot 2 = N+\frac{N^2}{2}$ multiplicaciones

Si N es grande, ahorro del 50% de multiplicaciones



$X_1(k)$ y $X_2(k)$ definidas para $0\le k\le \frac{N}{2}-1$

y $X(k)$ para $0\le k\le N-1$

Como encontrar $X(k)$ para $\frac{N}{2}\le k\le N-1$ ?

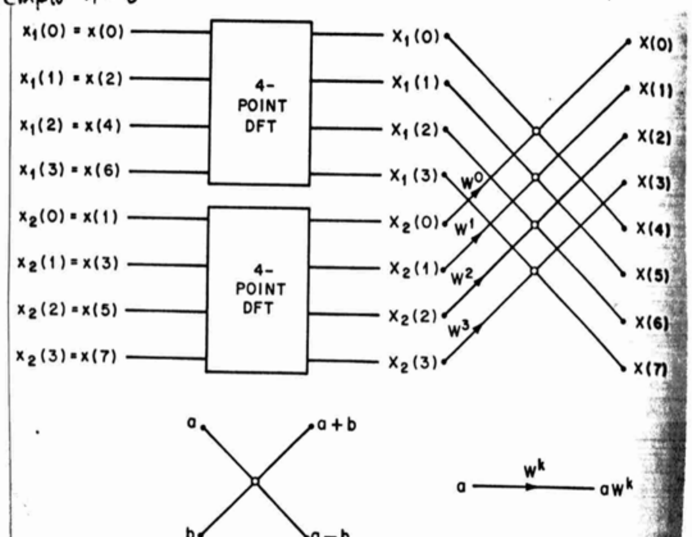
$$X(k)=\begin{cases} X_1(k)+W_N^k X_2(k) & , \ 0\le k\le \frac{N}{2}-1 \\ X_1(k-\frac{N}{2})+W_N^k X_2(k-\frac{N}{2}) & , \ \frac{N}{2}\le k\le N-1\end{cases}$$

Pero $W_N^{k+N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{N}{2})} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}e^{-j\pi} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = -W_N^k$

Por lo tanto,

$$X(k)=\begin{cases} X_1(k)+W_N^k X_2(k) & , \ 0\le k\le \frac{N}{2}-1 \\ X_1(k-\frac{N}{2})-W_N^{k-N/2} X_2(k-\frac{N}{2}) & , \ \frac{N}{2}\le k\le N-1\end{cases}$$

Ejemplo $N=8$

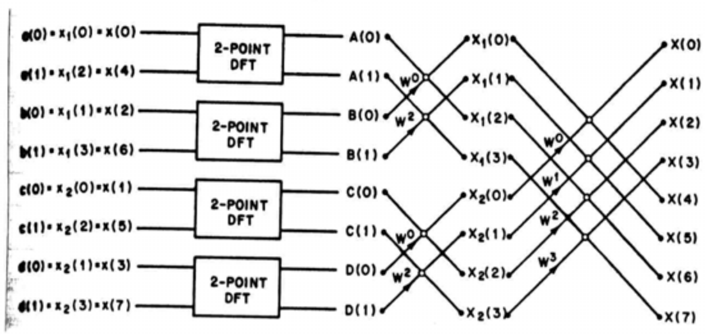


Iterando este proceso, $x_1(n)$ y $x_2(n)$ se dividen cada una en dos secuencias, una par y otra impar

Por ejemplo $X_1(k)$ para $0 \le k \le \frac{N}{2}-1$ :

$$X_1(k) = A(k) + W_{N/2}^{k} B(k) =$$

$$= A(k) + W_N^{2k} B(k)$$




Así, una DFT de $N$ elementos ($N$ potencia de 2) se reduce a varios DFT's de 2 elementos.

Una DFT de 2 elementos se efectua sin multiplicaciones: Por ejemplo, $a(n)$, $n=0,1$. entonces

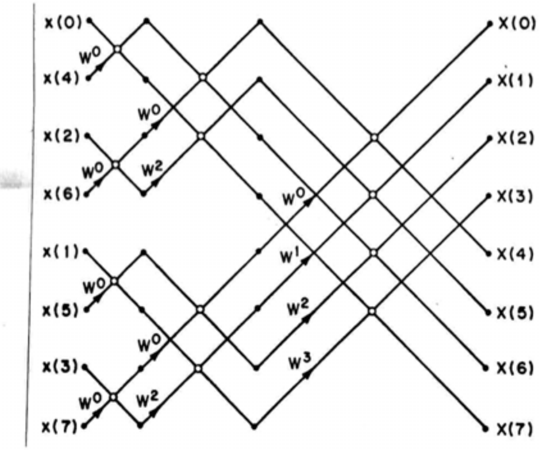
$$A(0) = a(0) + a(1)\, W_8^0$$

$$A(1) = a(0) + a(1)\, W_8^4$$

Pero $W_8^0 = 1$ y $W_8^4 = -1$



En resúmen :

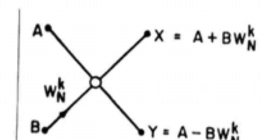



Algoritmo de decimación en tiempo

$\boxed{\log_2 N \text{ etapas}}$ No. de multiplicaciones $\approx \frac{N}{2} \log_2 N$

Multiplicaciones involucrando $W_N^0\ (1)$, $W_N^{N/2}\ (-1)$, $W_N^{N/4}\ (j)$ y $W_N^{3N/4}\ (-j)$ son realmente sumas y restas complejas.

Solamente una localidad adicional de memoria se requiere para calcular la FFT.




"Mariposa" para el algoritmo de decimación en tiempo.

### 6.6.1 Algoritmo de decimación en frecuencia

$$x_1(n) = x(n) \quad , \quad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}-1$$
$$x_2(n) = x\left(n+\frac{N}{2}\right) , \quad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}-1$$

$\therefore$ DFT de $x(n)$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)\, W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk} =$$
$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n)\, W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n)\, W_N^{(n+N/2)k} =$$
$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x_1(n) + e^{-j\pi k} x_2(n)\right] W_N^{nk}$$

Considerando elementos pares e impares de $X(k)$:

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x_1(n) + x_2(n)\right]\left(W_N^2\right)^{nk} =$$
$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x_1(n) + x_2(n)\right] W_{N/2}^{nk}$$

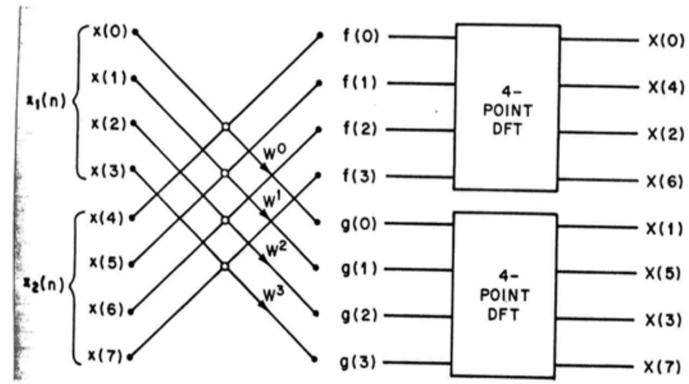
$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x_1(n) - x_2(n)\right] W_N^{n(2k+1)} =$$
$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{\left[x_1(n) - x_2(n)\right] W_N^{n}\right\} W_{N/2}^{nk}$$



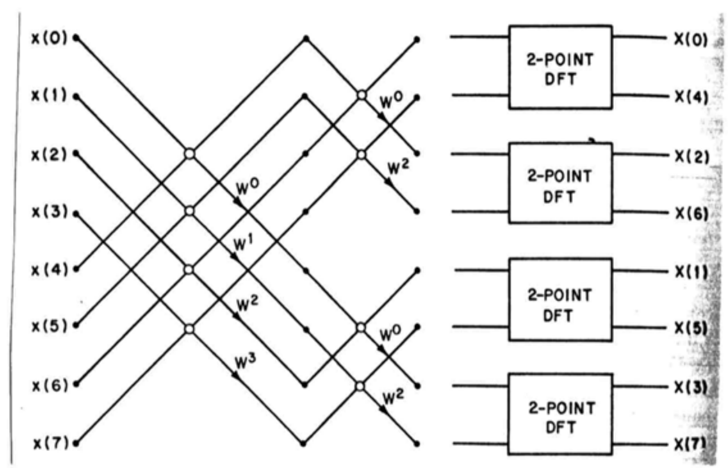
Por tanto, $X(2k)$ se obtiene de la DFT de $N/2$ elementos de $f(n) = x_1(n) + x_2(n)$ , $n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}-1$

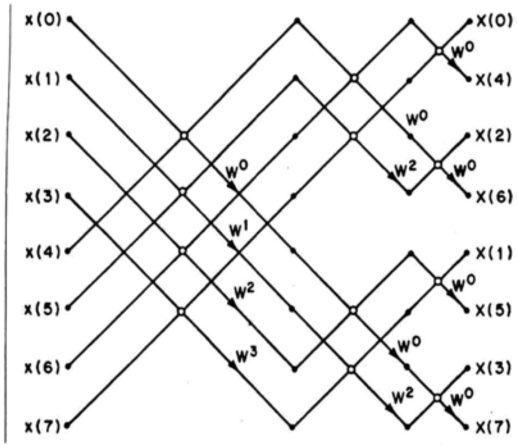
y $X(2k+1)$ se obtiene de la DFT de $\frac{N}{2}$ elementos de

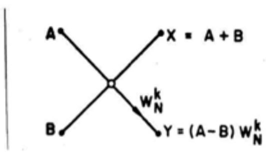
$$g(n) = \left[x_1(n) - x_2(n)\right] W_N^{n} \quad , \quad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}-1$$




Iterando este proceso se obtiene:






"Mariposa" para el algoritmo de decimación en frecuencia.

- Decimación en frecuencia: Valores de entrada en orden natural, y salida en orden de "bits invertidos"
- Decimación en tiempo: Entrada en orden de "bits invertidos" y salida en orden natural.



| Orden natural | Binario | Binario invertido | Orden invertido |
|---|---|---|---|
| 0 | 000 | 000 | 0 |
| 1 | 001 | 100 | 4 |
| 2 | 010 | 010 | 2 |
| 3 | 011 | 110 | 6 |
| 4 | 100 | 001 | 1 |
| 5 | 101 | 101 | 5 |
| 6 | 110 | 011 | 3 |
| 7 | 111 | 111 | 7 |

### 6.6.2 Cálculo de la transformada inversa discreta de Fourier (IDFT) por medio de la transformada directa discreta de Fourier (DFT)

La IDFT está definida como:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W^{-nk}$$

$$N x^*(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)\, W^{nk}}$$

DFT de $X^*(k)$. Se puede calcular con el mismo algoritmo de FFT.

Por lo tanto,

$$x(n) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)\, W^{nk}\right]^*$$