Procesamiento Digital de Imágenes

Apuntes del curso impartido por el Dr. Boris Escalante Ramírez

Agosto, 2006

2. Fundamentos de la Imagen Digital

2.1. Caracterización matemática de las imágenes

Una imagen puede ser definida como una función de dos dimensiones $f(x,y)$ donde x y y son las coordenadas *espaciales* (plano) y la amplitud de la función f en algún par de coordenadas (x,y) es llamada intensidad o nivel de gris de la imagen en ese punto. Cuando x, y y los valores de la amplitud de la función f son cantidades discretas finitas, a dicha imagen se le llama *imagen digital*.

Una imagen digital está compuesta de un número finito de elementos y cada uno tiene una localidad y valor particulares. A éstos elementos se les llama, *elementos de la imagen* o *pixels*; siendo este último el término más usado para denotar los elementos de una imagen digital.

2.2. Muestreo y cuantización

El muestreo es el proceso de convertir una señal (por ejemplo, una función continua en el tiempo o en el espacio) en una secuencia numérica (una función discreta en el tiempo o en el espacio). El teorema de muestreo señala que la reconstrucción (aproximadamente) exacta de una señal continua en el tiempo en banda base a partir de sus muestras es posible si la señal es limitada en banda y la frecuencia de muestreo es mayor que dos veces el ancho de banda de la señal. El teorema de muestreo es comúnmente llamado teorema de muestreo de Shannon y también conocido como teorema de muestreo de Nyquist-Shannon-Kotelnikov, Whittaker-Shannon-Kotelnikov, Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon, WKS, etc.

El proceso de muestreo sobre una señal continua que varía en el tiempo (o en el espacio como en una imagen u otra variable independiente en cualquier otra aplicación) es realizado midiendo simplemente los valores de la señal continua cada T unidades de tiempo (o espacio), llamado *intervalo de muestreo*. El resultado de este proceso es una secuencia de números, llamadas *muestras*, y son una representación de la imagen original. La *frecuencia de muestreo* f es el recíproco del intervalo de muestreo $f = 1/T$ y se expresa en Hz.

Las condiciones que se deben tomar en cuenta en el proceso de muestreo son:

- Limitar en banda a través de un filtro paso-bajas la señal a muestrear.
- Siguiendo el criterio de Nyquist, si conocemos el ancho de banda de la señal, entonces la frecuencia de muestreo f para lograr una reconstrucción casi perfecta de la señal original deberá ser

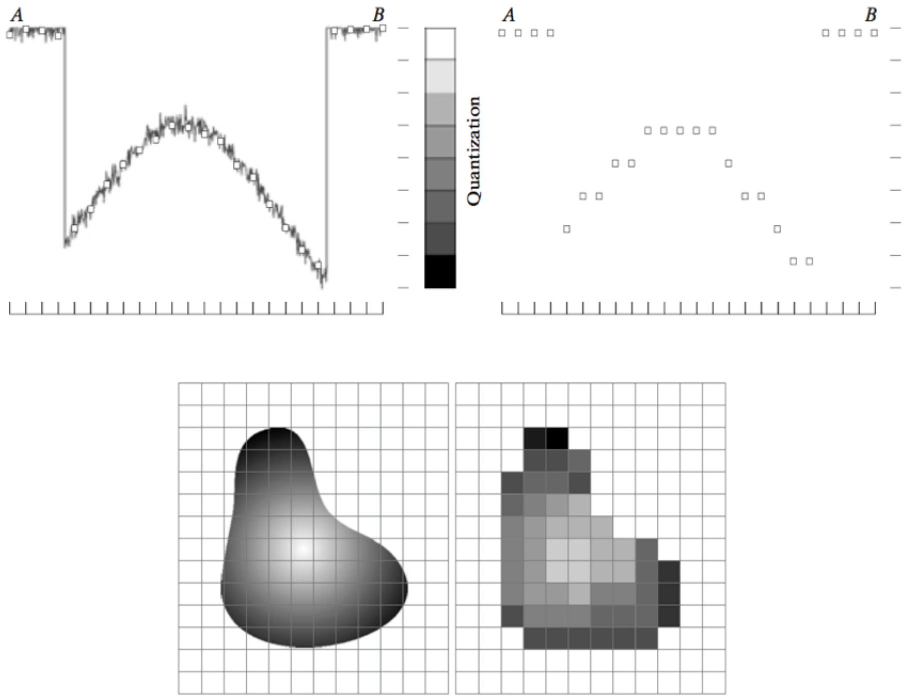
  $$f_N \geq 2WB$$

  donde WB es el ancho de banda de la señal original y la frecuencia de muestreo que sigue esta condición se le llama *frecuencia de Nyquist*.

Si las condiciones de muestro no se satisfacen, entonces las frecuencias se pueden llegar a traslapar; es decir, las frecuencias superiores a la mitad de la frecuencia de muestreo serán reconstruidas y aparentarán ser frecuencias por debajo de la frecuencia de muestreo. El resultado sería una distorsión llamada *aliasing*.

Aunque el teorema de muestreo esta formulado para funciones de una sola variable el teorema de muestreo puede ser extendido de la misma manera a funciones de varias variables arbitrarias. Por ejemplo, las imágenes en escala de grises son representadas frecuentemente como matrices de números reales representando las intensidades relativas de

Figura 1: Muestreo y cuantización de una imagen



los pixels (elementos de la imagen) localizados en las intersecciones de renglones y columnas. Como resultado, las imágenes necesitan dos variables independientes o índices para especificar a cada pixel individualmente; una para los renglones y otra para las columnas.

Las imágenes a color consisten regularmente de una composición de tres imágenes separadas en escala de grises, cada una representa los tres colores primarios; rojo, verde y azul; comúnmente conocido como RGB. Otros espacios de color que usan 3 vectores para colores son HSV, LAB, XYZ. Algunos espacios de color como el CMYK (cyan, magenta, yellow, black) son usados para procesos de impresión.

Una imagen puede ser continua respecto al eje de coordenadas x y y , pero también puede ser continua en amplitud. Para convertir una imagen continua a su forma digital, como se vio anteriormente, a la digitalización de los valores de las coordenadas se le llama *muestreo* mientras que el proceso de digitalizar la amplitud es llamado *cuantización*[1]. Normalmente, el proceso de adquisición de la imagen se realiza usando una matriz de sensores. El número de sensores dentro la matriz establecen los límites del muestreo en ambas direcciones. La digitalización de la amplitud o cuantización la realiza cada sensor asignando un valor discreto a ciertos intervalos de amplitudes continuas. La siguiente figura muestra ese proceso:

Claramente se ve que la calidad de la imagen esta determinada en gran medida por el número de muestras (resolución de la matriz) y los niveles discretos de gris usados durante el muestreo y cuantización respectivamente.

De manera similar a las señales discretas en el tiempo unidimensionales, las imágenes pueden sufrir del aliasing si la resolución de muestreo o densidad de pixels es inadecuada. Por ejemplo, una fotografía digital de una camisa rayada con bandas delgadas y de alta frecuencia, podría provocar el efecto de aliasing cuando sea capturada por el sensor (matriz de sensores) de la cámara. Una posible solución para mejorar el muestreo podría ser acercarse a la camisa o bien usar un sensor con mayor resolución.

2.3. Sistemas bidimensionales lineales e invariantes

Podemos dividir la clase general de sistemas en dos categorías; sistemas invariantes en el tiempo y sistemas variantes en el tiempo. Un sistema es llamado invariante en el tiempo si las características del sistema no cambian con el tiempo. El análisis de sistemas bidimensionales es muy similar al de sistemas en una dimensión por lo que empezaremos con sistemas en una dimensión y luego extenderemos los conceptos a dos dimensiones.

Suponiendo que tenemos un sistema S en un estado relajado que cuando es excitado por una señal de entrada $x(n)$ produce una señal de salida $y(n)$[2].

$$y(n) = S[x(n)]$$

Ahora supongamos que la misma señal de entrada es retrasada k unidades de tiempo, es decir, $x(n-k)$ y de nuevo aplicamos el mismo sistema. Si las características del sistema no cambian con el tiempo, entonces la salida del sistema deberá ser $y(n-k)$, es decir, la salida será la misma como respuesta a $x(n)$ excepto que estará retrasada por las mismas k unidades que fue retrasada la señal de entrada.

Definición: Un sistema S es invariante en el tiempo si y solo si

$$x(n) \underset{\longrightarrow}{S} y(n)$$

se cumple que

$$x(n-k) \underset{\longrightarrow}{S} y(n-k)$$

para cualquier señal de entrada $x(n)$ en cualquier tiempo k.

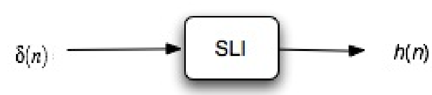
Para determinar si un sistema dado es invariante al tiempo necesitamos hacer una prueba siguiendo la definición. Excitamos al sistema con una señal de entrada arbitraria $x(n)$ que produce una salida denotada por $y(n)$. Luego retrasamos la señal de entrada k unidades de tiempo y volvemos a calcular la salida. En general podemos escribir la salida como:

$$y(n,k) = S[x(n-k)]$$

Entonces, si la salida $y(n,k) = y(n-k)$, para todos los valores posibles de k, el sistema es invariante en el tiempo. Por otro lado, si $y(n,k) \neq y(n-k)$, incluso para un valor de k, el sistema es variante en el tiempo.

Supongamos que tenemos un sistema lineal invariante en el tiempo como el de la siguiente figura:

Figura 2: Sistema Lineal Invariante

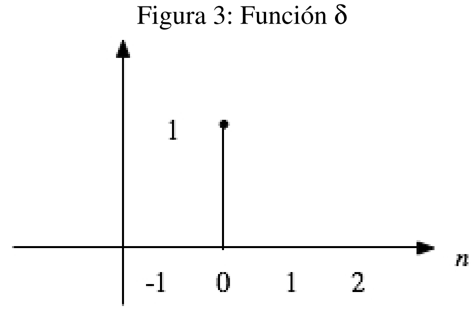


La señal de entrada al sistema es la función impulso y esta definida como:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{Si } n = 0 \\ 0 & \text{Si } n \neq 0 \end{cases}$$

como se muestra en la siguiente figura:

Figura 3: Función δ



Y sea $h(n)$ la respuesta al impulso del sistema. Entonces para que el sistema pertenezca a la clase de Sistemas Lineales Invariantes en el tiempo, si la respuesta al impulso esta dada por:

$$\delta(n) \underset{\longrightarrow}{S} h(n)$$

entonces se debe cumplir que sea invariante en el tiempo:

$$\delta(n-m) \underset{\rightarrow}{S} h(n-m)$$

y que además el sistema sea lineal.

Un sistema lineal es aquel que satisface la *homogeneidad y* el principio de *superposición.* Supongamos ahora que la entrada al sistema invariante es una señal arbitraria$f(n)$ y que la salida del sistema es $g(n)$. Podemos ver que $f(n)$ puede escribirse como:

$$f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m)$$

como se muestra en la figura.

Definición: El sistema debe satisfacer la homogeneidad si:

$$f(m)\delta(n-m) \underset{\rightarrow}{S} f(m)h(n-m)$$

Definición: El principio de superposición indica que la respuesta del sistema a una suma pesada de señales sea igual a la correspondiente suma pesada de las respuestas del sistema a cada una de las señales de entrada individuales, es decir:

$$\begin{array}{ccc} f(n) & \underset{\rightarrow}{S} & g(n) \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m) & \underset{\rightarrow}{S} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)h(n-m) \end{array}$$

Si el sistema cumple con estas condiciones entonces pertenece a la clase de Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (SLI).

La fórmula que da la respuesta $g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m)$ del SLI como una función de la señal de entrada $f(n)$ y de la respuesta al impulso es llamada suma de *convolución*. Podemos decir que la señal de entrada $x(n)$ se "convoluciona" con la respuesta al impulso del sistema $h(n)$ para obtener la salida $g(n)$:

$$g(n) = f(n) \star h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)h(n-m)$$

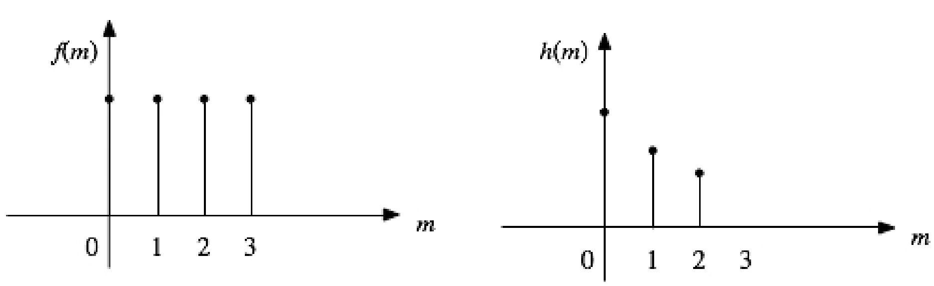
Propiedades de la convolución:

- Conmutativa:
$$f(n) \star h(n) = h(n) \star f(n)$$

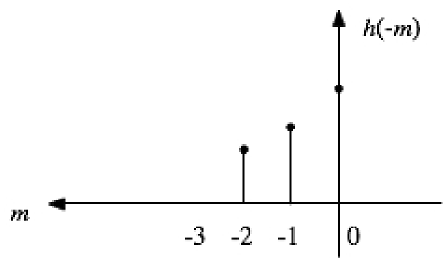
- Asociativa:
$$[f(n) \star h_1(n)] \star h_2(n) = f(n) \star [h_1(n) \star h_2(n)]$$

- Distributiva:
$$f(n) \star [h_1(n) + h_2(n)] = f(n) \star h_1(n) + f(n) \star h_2(n)$$

Ejemplo: Sean $f(m)$ y $h(m)$ como se muestran en la siguiente figura:



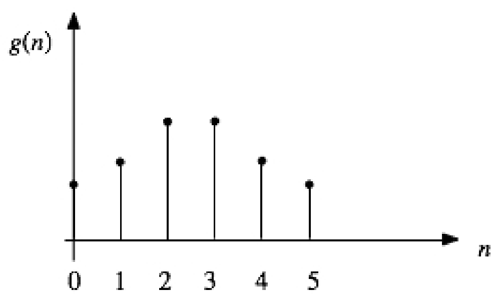
$h(-m)$ se puede graficar como:



Por lo que al encontrar

$$g(n) = \sum_{m=0}^{3} f(m)h(n-m)$$

queda:



2.4. Convolución bidimensional

Podemos extender el estudio de los SLI a dos dimensiones muy fácilmente y analizar el caso de manera muy similar a como se hace en una dimensión. Para ello, éstos sistemas deberán satisfacer los principios de homogeneidad, superposición y además de ser invariantes en el tiempo. En este caso la convolución bidimensional se define como [1]:

$$g(x,y) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)$$

y además todas las propiedades se conservan.

Ejemplo: Realizar la convolución $f(\alpha,\beta) \star h(\alpha,\beta)$. Sea

$$f(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y sea

$$h(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

para resolver el problema, primero elegimos un origen (las coordenadas $0,0$ en la imagen f y en el filtro h):

$$f(\alpha,\beta) = \begin{array}{c} \scriptstyle 0,0 \quad\quad\quad \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$h(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \overset{0,0}{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

y encontramos $h(-\alpha,-\beta)$. La forma gráfica de hacerlo es girar a los elementos de h de derecha a izquierda y luego de abajo hacia arriba como se muestra a continuación:

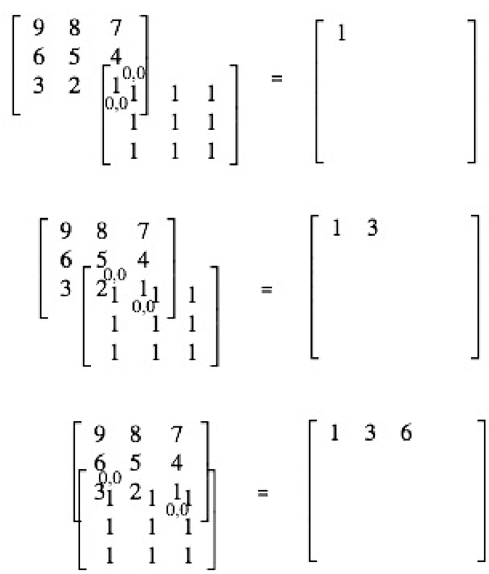
$$\begin{bmatrix} \overset{0,0}{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \overset{Giro}{\longleftarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & \overset{0,0}{1} \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} \overset{Giro}{\uparrow} \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & \underset{0,0}{1} \end{bmatrix}$$

por lo que

$$h(-\alpha,-\beta) = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & \underset{0,0}{1} \end{bmatrix}$$

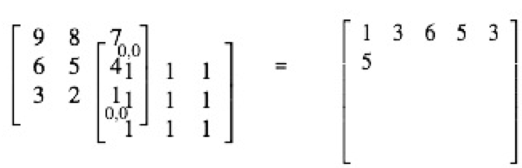
y realizamos la convolución superponiendo el origen de $h(-\alpha,-\beta)$ en el origen de $f(\alpha,\beta)$. El proceso se muestra en a siguiente figura:

Figura 4: Convolución bidimensional



Realizando las multiplicaciones y sumas correspondientes sobre el resto del renglón, entonces tendremos lo siguiente:

Figura 5: Convolución bidimensional



El cálculo final involucraría realizar las multiplicaciones y las sumas sobre los renglones y columnas. La siguiente matriz muestra el resultado de algunos elementos fila-columna; se deja al lector completar los que hacen falta.

$$g(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 5 & 3 \\ 5 & 12 & & & \\ 12 & & & & \\ 11 & & 28 & & \\ 7 & & & & 9 \end{bmatrix}$$

Nota: se puede elegir otro origen, a veces será más conveniente por la simetría del filtro tomarlo en el centro.

Referencias

[1] Gonzalez, R. C. , and Woods, P., *Digital Image Processing*, Addison Wesley, 2002

[2] Proakis, John G. , and Manolakis, Dimitris G., *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and applications*, Prentice-Hall, Inc, 1996.