Procesamiento Digital de Imágenes
Práctica 2
“Convolución lineal y circular utilizando la DFT”

Dr. Boris Escalante R.

2 de Marzo, 2009

Reglas generales para el desarrollo de las Prácticas de Laboratorio.

- El reporte de las prácticas constará de las secciones: objetivo, introducción, desarrollo (incluyendo cálculos si es el caso), resultados, conclusiones, código fuente y bibliografía.
- Las prácticas deben ser originales, es decir, se sancionará a los equipos o autores de prácticas idénticas, incluyendo si fueron copiadas de prácticas de semestres anteriores.
- Se recomienda trabajar en MATLAB ya que podrán obtener asesoría sobre el uso de comandos de este paquete. Esto no significa que no puedan usar otras herramientas, sin embargo, no estará garantizada la asesoría en estos casos.
- El desarrollo de la práctica es trabajo de casa. El día de entrega de la práctica deberán llegar preparados, con el reporte elaborado e impreso. No se reciben reportes en formato electrónico. Durante ese día solo de revisará la práctica, se verificará el funcionamiento de los programas, sus resultados y las conclusiones que hayan obtenido con el fin de corroborar que el objetivo de la práctica se haya logrado.

1. Objetivos:

- Calcular la convolución lineal y la convolución circular de una imagen y explicar sus diferencias.
- Comprender la relación $f(x) \otimes h(x) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(k) \times H(k)$
- Comprobar que la mayor concentración de la energía se encuentra en los primeros coeficientes de la DFT.

2. Introducción

La Transformada Discreta de Fourier (DFT, por sus siglas en inglés Discrete Fourier Transform) provee un método para transformar los datos muestreados en el dominio del tiempo a una expresión de estos datos en el dominio de la frecuencia. La inversa de la transformada reinvierte este proceso, convirtiendo los datos en el dominio de la frecuencia en datos en el dominio temporal. Estas transformaciones pueden ser aplicadas en una gran variedad de campos desde la geofísica hasta la astronomía, desde el análisis de señales de sonido hasta el análisis de la concentración de CO_2 en la atmósfera. Algunos algoritmos de reconstrucción 3D utilizados en Tomografía Computarizada (CT) hacen uso también de la DFT [2].

La Transformada Rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés Fast Fourier Transform) provee un algoritmo eficiente para implementar la DFT en computadora. Esta transformada es fácilmente ejecutada y, de hecho, es incluida en casi cualquier paquetería de software matemático como función [4]. Muchos libros están dedicados únicamente a la FFT y diferentes versiones de la FFT han sido propuestas; así mismo la investigación para hacer estos algoritmos más eficientes aún continua y es un campo abierto. Por ejemplo, el algoritmo de Cooley-Tukey hace la FFT bastante útil reduciendo el número de cálculos de n^2 a $nlog(n)$ con lo cual obviamente el tiempo computacional es reducido considerablemente. El método de descomposición usado en el algoritmo de Cooley-Tukey puede ser aplicado a otras transformaciones ortogonales como la Hadamard, Hartley y la Haar.

Por otro lado, la convolución es un proceso que tiene muchas aplicaciones y sobre el ésta se podría decir, descansa el procesamiento digital de señales. La convolución de una función de entrada $f(x)$ y la respuesta al impulso de un sistema lineal $h(x)$ representa la cantidad de traslape de una función conforme una ésta se mueve sobre la otra generando un tipo de combinación entre las dos funciones [3]:

$$g(x) = f(x) * h(x)$$

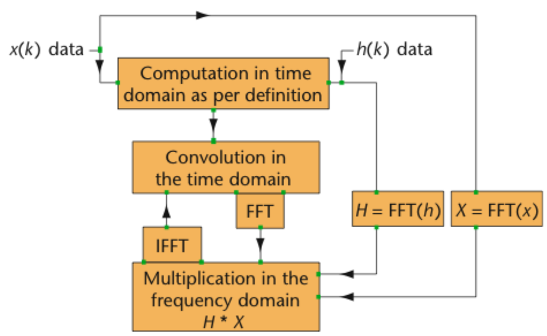
Un ejemplo de una aplicación de la convolución es el filtrado.

Probablemente la herramienta más poderosa en el análisis científico moderno es la relación entre la convolución y la transformada de Fourier. Dicha relación es el teorema de la convolución y se expresa de la siguiente manera:

$$f(x) \otimes h(x) \underset{\longleftrightarrow}{\mathscr{F}} F(k) \times H(k)$$

La siguiente figura muestra de manera esquemática dicho teorema:

Figura 1: La relación entre las operaciones en el dominio de la frecuencia y el dominio temporal. La multiplicación de las FFT's de x y h seguidas por una IFFT es el equivalente a una convolución. De manera similar, la FFT de la convolución en el dominio temporal es equivalente al producto de las FFT's.



3. Desarrollo

1. Obtener la convolución lineal (comando MATLAB conv2 y argumentos 'full', 'same' y 'valid' de la imagen con un filtro paso bajas (filtro de bloque). Usar 2 o 3 tamaños diferentes de filtros, por ejemplo: 7x7, 9x9 y 11x11. Desplegar las imágenes resultantes.

2. Obtener la DFT de la imagen original y desplegarla de manera amplificada utilizando el logaritmo del módulo de la DFT para dicha amplificación. Cambiar el eje de coordenadas (comando MATLAB fftshift) y nuevamente amplificar.

3. Obtener la convolución circular ($\otimes$) de la imagen con el filtro paso bajas a través de la DFT. Usar también diferentes tamaños de filtros. Desplegar las imágenes resultantes.

4. Obtener la convolución lineal ($*$) de la imagen con el filtro paso bajas a través de la DFT (comandos MATLAB fft2 y ifft2). Usar también diferentes tamaños de filtros. Desplegar las imágenes resultantes. (Recordar que $f(x) \otimes h(x) \underset{\longleftrightarrow}{\mathscr{F}} F(k) \times H(k)$ y $* \neq \otimes$)

5. Comparar los resultados obtenidos en los puntos 1,3 y 4 desplegando para un mismo tamaño de filtro, las 3 convoluciones, por ejemplo: convolución lineal filtro 9x9, convolución lineal (DFT) filtro 9x9, convolución circular (DFT) filtro 9x9.

Nota: el argumento 'full' regresa la convolución lineal 2D completa.

4. Resultados

Desplegar las imágenes filtradas con los diferentes filtros utilizados. Explicar porque existen o no diferencias entre las imágenes filtradas usando los métodos:

1. Convolución lineal (comando MATLAB conv2 y argumentos 'full', 'same' y 'valid').
2. Convolución lineal a través de la DFT.
3. Convolución circular a través de la DFT.

Desplegar la DFT amplificada de la imagen y explicar.

5. Código

En esta sección deberán presentar el código fuente del programa en MATLAB (o en la herramienta que hayan utilizado en su defecto).

6. Conclusiones

Referencias

[1] Gonzalez, R. C. , and Woods, P., *Digital Image Processing*, Addison Wesley, 2002.

[2] D. Donnelly and B. Rust, "The Fast Fourier Transform for Experimentalists Part I: Concepts", *Computing in Science & Eng*., vol. 7, no. 2, 2005, pp. 80-88.

[3] D. Donnelly and B. Rust, "The Fast Fourier Transform for Experimentalists Part II: Convolutions", *Computing in Science & Eng*., vol. 7, no. 3, 2005, pp. 92-95.

[4] FFTW, www.fftw.org